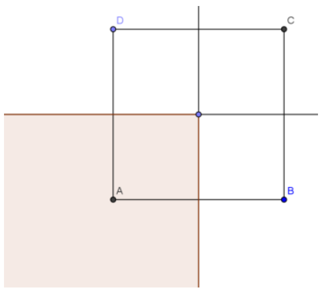
Výsledky

1. Teorie množin

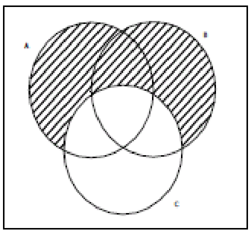
1.1 Množiny, Vennovy diagramy

1.1.1 a)

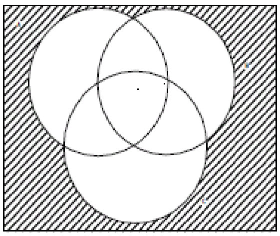


b) Půlkružnice se středem B a poloměrem $|BA|$ bez krajních bodů na přímce BD. Půlkružnice obsahuje bod A. c) Sjednocení poloroviny →BDC bez hraniční přímky BD a kruhu se středem B a poloměrem $|BD|$. **1.1.2** M je kosočtverec T_1BT_2D; M = L; M $\subset$ K; L $\subset$ K. **1.1.3** a) Osa úsečky AC. b) Kružnice k(A;$|AB|$). c) Kruh o středu C a poloměru $|CA|$). d) Mezikruží bez hraničních kružnic; střed kružnic v bodě A, poloměry kružnic $|AB|$, $|AC|$.

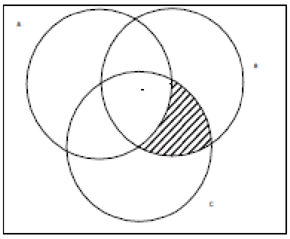
1.1.4 a)



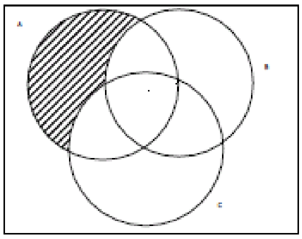
b)



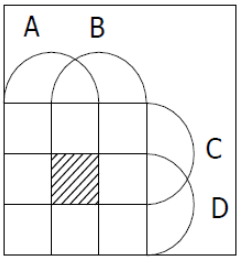
c)



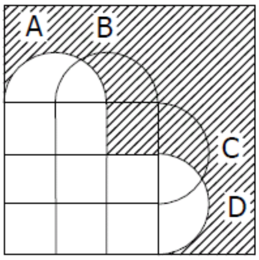
d)



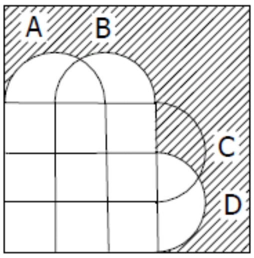
1.1.5 a)



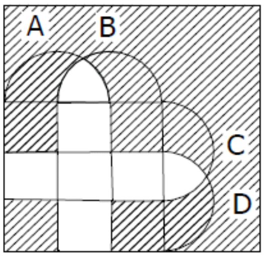
b)



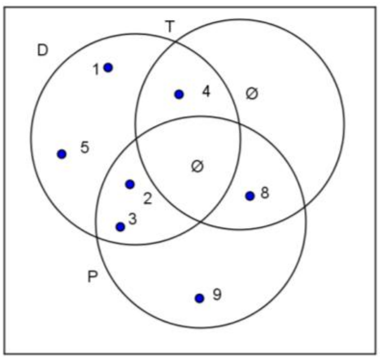
c)



d)



1.1.6



1.1.7 a) $A \subset B; \forall\, a \in U; a \in A \Longrightarrow a \in B$.

b) $A \subset B; \forall\, a \in U; a \in A \Longrightarrow a \in B$;

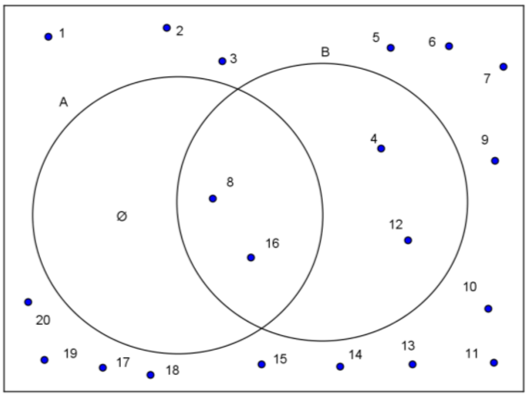
$A = \emptyset; \forall\, a \in U; a \notin A.$

c) $A = B; \forall\, a \in U; a \in A \Longleftrightarrow a \in B$;

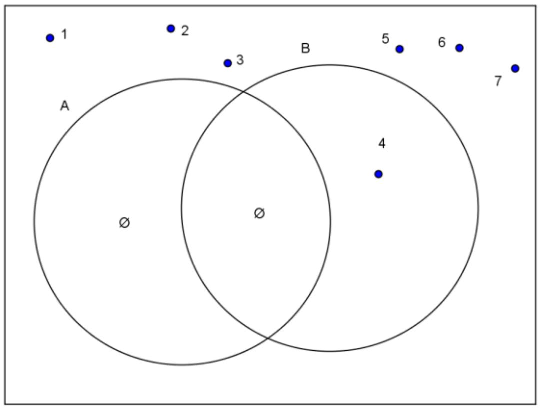
$A = \emptyset; \forall\, a \in U; a \notin A;$

$B = \emptyset; \forall\, a \in U; a \notin B.$

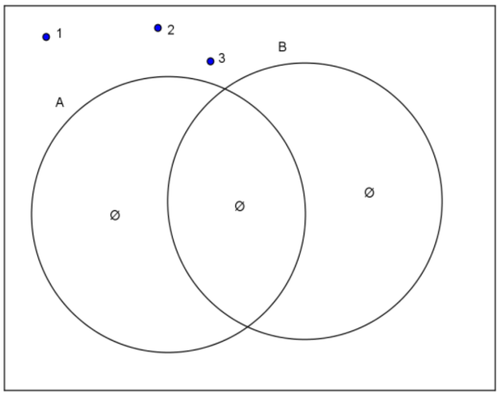
a)



b)

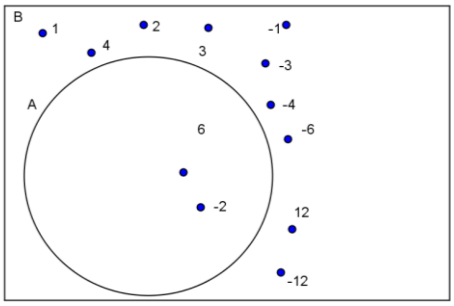


c)



1.1.8 $A \subset B; \forall\, x \in Z;\ x^2 - 4x - 12 = 0 \Longrightarrow x|12$

.



1.2 Důkazy rovnosti množin pomocí Vennových diagramů

1.2.1 a), b), d), e) platí. c) neplatí. **1.2.2** a), b), d) neplatí. c) platí. **1.2.3** a) C. b) $A \cup B \cup C$.c) $A' \cap C \cap D'$.**1.2.4** Prodavačka neodhadla správně Jirkovo přání. Otec koupil autíčko, které také splňovalo Jirkovo přání.

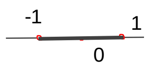
1.3 Zákony pro operace s množinami

1.3.3 a) $M \cup N$. b) M. c) ϕ. d) $A \cap K$.

1.4 Množina R a její podmnožiny

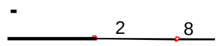
1.4.1 Pomocí Pythagorovy věty, např. $\sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1^2}$, $\sqrt{3} = \sqrt{2^2 - 1^2}$, $\sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1^2}$, $\sqrt{11} = \sqrt{6^2 - 5^2}$, $\sqrt{12} = \sqrt{4^2 - 2^2}$, nebo Euklidových vět, např. $\sqrt{2} = \sqrt{2.1}$, $\sqrt{3} = \sqrt{3.1}$, $\sqrt{5} = \sqrt{2{,}5\,.2}$, $\sqrt{11} = \sqrt{5{,}5\,.2}$, $\sqrt{12} = \sqrt{3.4}$. **1.4.2** $|x + 2{,}5| < 17{,}5$; $\left|x - \frac{83}{15}\right| \leq \frac{13}{15}$; $-12 \leq x < 7$; $-12 < x \leq 7$; **1.4.3** $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$; $\langle a - \varepsilon;\ a + \varepsilon\rangle$. **1.4.4** $\sqrt{5} - 1$; $\sqrt{7} - 2$; $5 - \sqrt{3}$; pro $x \geq 1 : x - 1$, pro $x \leq 1 : 1 - x$; pro $x \geq 3 : x - 3$, pro $x \leq 3 : 3 - x$; pro $x \geq 2{,}5 : 2x - 5$, pro $x \leq 2{,}5 : 5 - 2x$; pro $x \geq \frac{2}{9}$: $9x - 2$, pro $x \leq \frac{2}{9}$: $2 - 9x$. **1.4.5** $\{-2; 8\}$; $\{-4; 1\}$; $\left\{-\frac{1}{3}; 1\right\}$. **1.4.6** $\langle 1; 5\rangle$; $(-\infty; -7) \cup (1; \infty)$; $(0{,}5; 4{,}5)$. **1.4.7** $\frac{2\sqrt[3]{25}}{5}$; $\frac{\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{5} + 1}{3}$; $-\frac{2(\sqrt[3]{9} + 2\sqrt[3]{3} + 4)}{5}$; $\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$; $\frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$; $\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$.

1.4.8 a)



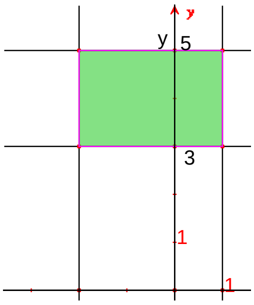
b)

c)

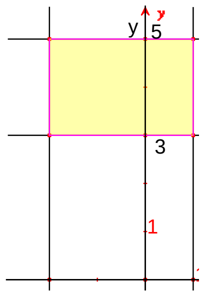


1.5 Kartézský součin, binární relace, zobrazení

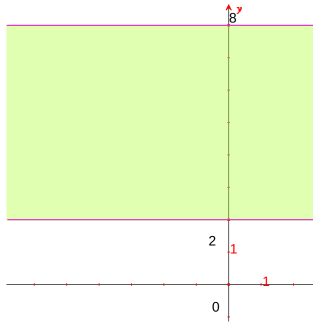
1.5.1 a)



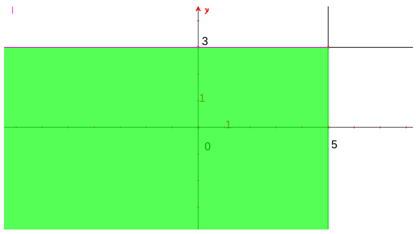
b)



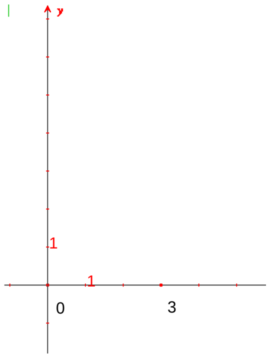
c)



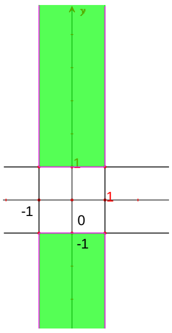
d)



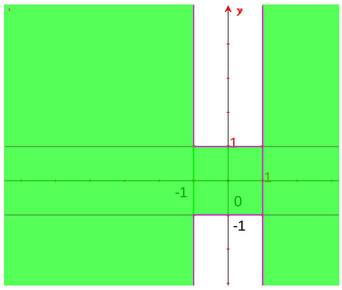
e)



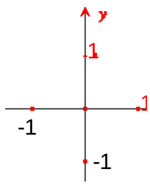
1.5.2 a)



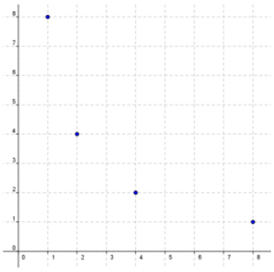
b)

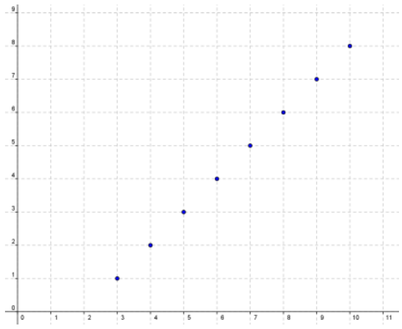


c) body $[\pm 1,0]$, $[0,-1]$

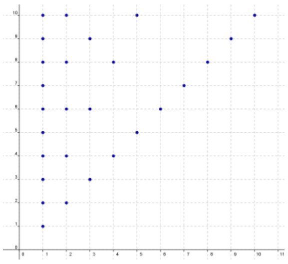


1.5.3 a) {[1,8], [2,4], [4,2], [8,1]}. b) {[10,8], [9,7], [8,6], [7,5], [6,4], [5,3], [4,2], [3,1]}.

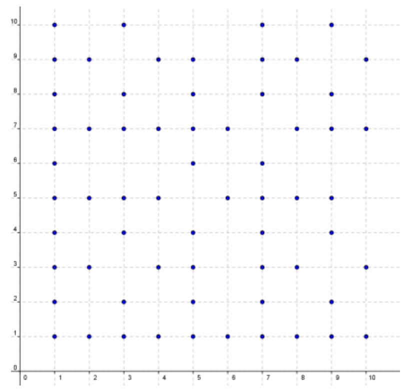




c)
{[1,10], [1,9],[1,8], [1,7], [1,6], [1,5], [1,4], [1,3], [1,2], [1,1], [2,10], [2,8], [2,6], [2,4], [3,9], [3,6], [3,3], [4,8], [4,4], [5,10], [5,5], [6,6], [7,7], [8,8], [9,9], [10,10]}



d)
{[1,1], [1,2], [1,3], [1,4], [1,5], [1,6], [1,7], [1,8], [1,9], [1,10], [2,1][2,3], [2,5], [2,7], [2,9], [3,1], [3,2], [3,4], [3,5], [3,7], [3,8], [3,10], [4,1], [4,3], [4,5], [4,7], [4,9], [5,1], [5,2], [5,3], [5,4], [5,6], [5,7], [5,8], [5,9], [6,1], [6,5], [6,7], [7,1], [7,2], [7,3], [7,4], [7,5], [7,6], [7,8], [7,9], [7,10], [8,1], [8,3], [8,5], [8,7], [8,9], [9,1], [9,2], [9,4], [9,5], [9,7], [9,8], [9,10], [10,1], [10,3], [10,7], [10,9]}.



1.5.4 a) b). **1.5.5** a) {[1,8], [2,4], [4,2], [8,1]}. b) {[8,10], [7,9], [6,8], [5,7], [4,6], [3,5], [2,4], [1,3]}. c) {[10,1], [9,1],[8,1], [7,1], [6,1], [5,5], [4,1], [3,1], [2,1], [1,1], [10,2], [8,2], [6,2], [4,2], [9,3], [6,3], [3,3], [8,4], [4,4], [10,5], [5,5], [6,6], [7,7], [8,8], [9,9], [10,10]}. d)
{[1,1], [1,2], [1,3], [1,4], [1,5], [1,6], [1,7], [1,8], [1,9], [1,10], [2,1][2,3], [2,5], [2,7], [2,9], [3,1], [3,2], [3,4], [3,5], [3,7], [3,8], [3,10], [4,1], [4,3], [4,5], [4,7], [4,9], [5,1], [5,2], [5,3], [5,4], [5,6], [5,7], [5,8], [5,9], [6,1], [6,5], [6,7], [7,1], [7,2], [7,3], [7,4], [7,5], [7,6], [7,8], [7,9], [7,10], [8,1], [8,3], [8,5], [8,7], [8,9], [9,1], [9,2],

[9,4], [9,5], [9,7], [9,8], [9,10], [10,1], [10,3], [10,7], [10,9]}.

2. Výroková logika

2.1 Složené výroky

2.1.1a) Obrácená: Jestliže nepřijdu, bude zítra pršet. Obměněná: Jestliže přijdu, nebude zítra pršet. Negace: Zítra bude pršet a přijdu. b) Obrácená: Je-li dané celé číslo dělitelné čtrnácti, pak je dělitelné dvěma a sedmi. Obměněná: Není-li dané celé číslo dělitelné čtrnácti, pak není dělitelné dvěma nebo není dělitelné sedmi. Negace: Dané celé číslo je dělitelné dvěma a sedmi a není dělitelné čtrnácti. c) Obrácená: Je-li dané celé číslo dělitelné třemi a osmi, pak je dělitelné čtyřiadvaceti. Obměněná: Není-li dané celé číslo dělitelné osmi nebo třemi, pak není dělitelné čtyřiadvaceti. Negace: Dané celé číslo je dělitelné čtyřiadvaceti a není dělitelné třemi nebo není dělitelné osmi.

2.1.2 a) Zítra bude pršet a nepůjdu do kina ani do divadla. b) Zítra nebude pršet a nepojedu na výlet. c) Eva přijede právě když přijede Adam nebo Petr. d) Nejím ryby nebo drůbež nebo jím vepřové maso. e) Léky užívám tehdy a jen tehdy , když nejsem nemocný. f) Nepřijde Petr ani Pavel a nepůjdu do kina sám. g) Nestihnu vlak a nepřijedu autobusem ani autem.

2.2 Výroky s kvantifikátory

2.2.1 a) $\forall x \in R;\ |x| > 0$. Nepravdivý. b) $\forall z \in Z;\ 2 \mid z \wedge 3 \mid z \Rightarrow 6 \mid z$. Pravdivý. c) $\forall n \in N;\ 2 \mid [n + (n+1) + (n+2) + (n+3)]$. Pravdivý. d) $\forall n \in N;\ 6 \mid n(n+1)(n+2)$. Pravdivý. e) $\exists z \in Z;\ z^3 > 0$. Pravdivý. f) $\exists x \in R;\ \frac{1}{x} > 0$. Pravdivý. **2.2.2** a) Přímka nemá s kružnicí společný žádný bod nebo má společné aspoň dva body. b) Dnešní úlohu odevzdali dva žáci. c) Dnes chybí aspoň jeden. d) Aspoň jeden student naší třídy nepřišel včas. e) Bez práce jsou koláče. f) Aspoň jeden učený spadl z nebe. **2.2.3** a) Daný trojúhelník není pravoúhlý nebo žádný úhel nemá menší než 30^0. b) Daná rovnice nemá žádný záporný a žádný kladný kořen. c) Daná rovnice má aspoň jeden dvojnásobný kořen a nemá žádný další kořen. d) Daný trojúhelník není rovnoramenný a konstrukce bude mít více než dva různé výsledky. e) Tři sestrojené body splynou právě tehdy, když daný trojúhelník není rovnostranný. **2.2.4** a) Nepravdivý. b) Pravdivý. c) Nepravdivý. d) Pravdivý.

2.3 Výrokové formy

2.3.1 O = R: a) $D = R \setminus \{-1\}$, $P = < -\sqrt{2}, -1) \cup < \sqrt{2}, \infty)$. b) $D = R \left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}$, $P = <-3, -1> \cup (-\frac{1}{2}, 0> \cup < 1, 2)$. c) $D = R \setminus \{2, -5\}$, $P = (-\infty, -5) \cup (-5, -2) \cup (0, 2) \cup (2, \infty)$. d) $D = R \setminus \{0\}$, $P = (-\infty, 0) \cup (0, 2)$. e) $D = R \setminus \{1; 2\}$, $P = \langle \frac{5-\sqrt{17}}{2}, 1) \cup (2, \frac{5+\sqrt{17}}{2}\rangle$.

O = Z: a) $D = Z \setminus \{-1\}$, $P = \{x \in Z; x \geq 2\}$. b)) $D = Z \setminus \{2\}$, $P = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$. c) $D = Z \setminus \{2; -5\}$, $P = \{x \in Z; x \leq -6\} \cup \{-4, -3, 1\} \cup \{x \in Z; x \geq 3\}$. d) $D = Z \setminus \{0\}$, $P = Z^- \cup \{1\}$. e) $D = Z \setminus \{1; 2\}$, $P = \{3; 4\}$.

O = N: a) $D = N$, $P = \{x \in N; x \geq 2\}$. b)) $D = N \setminus \{2\}$, $P = \{1\}$. c) $D = N \setminus \{2\}$, $P = N \setminus \{2\}$. d) $D = N$, $P = \{1\}$. e) $D = N \setminus \{1; 2\}$, $P = \{3; 4\}$.

2.4 Úsudky

2.4.1 a) správný, b), c) nesprávné. **2.4.2** a) b) nesprávné. **2.4.3** a), c) správné, b) nesprávný. **2.4.4** a), b) nesprávné. **2.4.5** správný.

2.5 Důkazy matematických vět

2.5.1 a) $5.\,3^{a+2} - 3.\,3^{a+1} = 3^a(5.9 - 9) = 36.\,3^a$; a ϵ N. b) $3.\,2^{a+3} - 2.\,2^{a+2} + 2^{a+4} = 2^{a+2}.(6 - 2 + 4) = 2^{a+2}.8 = 2^{a+5}$; a ϵ N. **2.5.2** Rovnost dokážeme umocněním. **2.5.3** Důkaz sporem. Umocněním předpokladu dostaneme: $a + \sqrt{b} \neq a + \sqrt{a^2 - r^2}$, po dosazení za r: $a + \sqrt{b} \neq a + \sqrt{b}$...spor. **2.5.4** Důkaz sporem. Umocněním předpokladu dostaneme: $11 + 6\sqrt{2} \leq 19$, dalším umocněním $72 \leq 64$…spor. **2.5.5** Důkaz sporem. Umocněním předpokladu dostaneme: $10 - \sqrt{11} \geq 11 + \sqrt{11} - 2\sqrt{10 + \sqrt{11}}$. Pak: $2\sqrt{10 + \sqrt{11}} \geq 1 + 2\sqrt{11}$ a dvojím umocněním dostaneme spor, $40 \geq 45$. **2.5.6** a) Dokázat implikace $\forall n \in N;\ 2|\,n \Rightarrow 2|n^2$ (přímý důkaz) a $\forall n \in N;\ 2|n^2 \Rightarrow 2|\,n$ (nepřímý důkaz). b) Dokázat implikace $\forall n \in N;\ 3|\,n \Rightarrow 3|n^2$ (přímý důkaz) a $\forall n \in N;\ 3|n^2 \Rightarrow 3|\,n$ (nepřímý důkaz). **2.5.7** Užijte důkaz sporem.

3. Teorie čísel

3.1 Důkazy vět o dělitelnosti

3.1.1 a) (10a + b) + (10b + a) = 11(a + b), a,b ϵ $\{1, 2, \ldots, 9\}$. b) (10a + b) - (10b + a) = 9(a - b); a,b ϵ $\{1, 2, \ldots, 9\}$. c) (100a + 10b + c) – (100c + 10b + c) = 99(a-c); a,c ϵ $\{1, 2, \ldots, 9\}$, $b \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. **3.1.2** $2^m + 2^{m+1} + 2^{m+2} = 7.\,2^m$, m ϵ N. **3.1.3** Aspoň jeden z činitelů je dělitelný dvěma, aspoň jeden je dělitelný třemi, aspoň jeden je dělitelný čtyřmi a aspoň jeden je dělitelný pěti. Proto je součin dělitelný číslem 2.3.4.5, tj. 120, a každým dělitelem čísla 120. **3.1.4** a) 100.K + 10a + b je dělitelné čtyřmi, právě když je dělitelné čtyřmi číslo 10a + b, protože 100.K je dělitelné čtyřmi; K ϵ N_0, a,b jsou lib. cifry. b) 1000.K + 100a + 10b + c je dělitelné osmi, právě když je dělitelné osmi číslo 100a + 10b + c, neboť 1000.K je dělitelné osmi; K ϵ N_0, a,b,c jsou lib. cifry. c) d) $a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + a_{n-2}.10^{n-2} + \ldots + a_1.10 + a_0 = a_n.(10^n - 1 + 1) + a_{n-1}.(10^{n-1} - 1 + 1) + a_{n-2}.(10^{n-2} - 1 + 1) + \ldots + a_1.(9 + 1) + a_0 = a_n.(10^n - 1) + a_{n-1}.(10^{n-1} - 1) + a_{n-2}.(10^{n-2} - 1) + \ldots + a_1.9 + (a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_1 + a_0)$; každé z čísel $10^k - 1$ je dělitelné devíti (třemi); číslo je tedy dělitelné devíti (třemi), právě když je dělitelné devíti (třemi) číslo $a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_1 + a_0$, tj. ciferný součet daného čísla; n,k ϵ N_0, a_i lib. cifry. **3.1.5** Při dělení pěti jsou možné zbytky 0, 1, 2, 3, 4. **3.1.6** k + (k+1) + (k+2) = 3(k+1); k ϵ N. Obdobně pro součet pěti a sedmi po sobě jdoucích čísel. **3.1.7** a) $n^3 + 2n = n(n^2 + 2)$. Postupně dokážeme pro n = 3k, n = 3k+1, n = 3k + 2; k ϵ N_0. b) $n^3 + 11n = n(n^2 + 11)$. Postupně dokážeme pro n = 6k, n = 6k + 1, n = 6k +2, n = 6k + 3, n = 6k + 4, n = 6k + 5; k ϵ N_0. c) $n^4 + 3n^2 = n^2(n^2 + 3)$. Postupně dokážeme pro n = 2k, n = 2k + 1; k ϵ N_0. **3.1.8** a) $n^3 - n = (n-1).n.(n+1)$, n ϵ N; Součin tří po sobě jdoucích čísel, jeden činitel je určitě dělitelný třemi a aspoň jeden činitel je určitě sudý, součin je tedy dělitelný šesti. b) $n^4 - n^2 = (n-1).n^2.(n+1)$, n ϵ N; Součin tří po sobě jdoucích čísel, jeden činitel je určitě dělitelný třemi a určitě jsou dva činitelé sudá čísla (buď n nebo n+1, n-1), je tedy dělitelný dvanácti. c) $5n^3 + 15n^2 + 10n = 5n(n+1)(n+2)$; n ϵ N. Součin je dělitelný pěti, třemi (tři po sobě jsoucí čísla), dvěma (dvě po sobě jdoucí čísla), tj. je dělitelný třiceti. **3.1.9** a) $n^5 - n^3 = (n-1).n^3.(n+1)$, n ϵ N; Součin tří po sobě jdoucích čísel, jeden činitel je určitě dělitelný třemi. Je – li n sudé, pak n^3 je dělitelné osmi, je-li n liché pak součin (n-1).(n+1) je dělitelné osmi. b) $n^5 - n = (n-1).n.(n+1).(n^2+1)$, n ϵ N; Součin tří po sobě jdoucích čísel, jeden činitel je určitě dělitelný třemi a určitě jeden dělitelný dvěma, je tedy dělitelný šesti, a stačí dokázat dělitelnost pěti postupně pro n = 5k, n = 5k + 1, n = 5k +2, n = 5k + 3, n = 5k + 4 , k ϵ N_0. **3.1.10** a) $\forall n \in N; 5|n \Rightarrow 5 \nmid (n^2 + 1); n = 5k\ (k \in \mathrm{N}) \Rightarrow n^2 + 1 = 25k^2 + 1;$

$5 \nmid (25k^2+1) \Rightarrow 5 \nmid (n^2+1)$. b) $\forall n \in N; 3|(n^2+2) \Rightarrow 3 \nmid n$; Nepřímý důkaz, dokazujeme : $\forall n \in N; 3|n \Rightarrow 3 \nmid (n^2+2) \Rightarrow 3|n$; Nepřímý důkaz, dokazujeme: $\forall n \in N; 3 \nmid n \Rightarrow 3|(n^2+2)$; Dokážeme postupně pro n = 3k + 1, n = 3k +2, k ϵ N_0, dělitelnost výrazu n^2+2 třemi. c) $\forall n \in N; 3 \nmid (n^4+2) \Rightarrow 3 \nmid (n^2+1)$; Nepřímý důkaz, dokazujeme : $\forall n \in N; 3|n \Rightarrow 3 \nmid (n^2+2)$; $n = 3k$ $(k \in \mathrm{N}) \Rightarrow n^2+2 = 9k^2+2$; $3 \nmid (9k^2+2) \Rightarrow 3 \nmid (n^2+2)$. **3.1.11** Vyskytuje-li se mocnina prvočísla v prvočíselných rozkladech obou čísel a, b, pak menší mocninu uplatníme v D(a,b), větší v n(a,b). Pokud je mocnina prvočísla stejná, užije se v D(a,b) i n(a,b). Objeví-li se mocnina prvočísla jen v jednom z rozkladů, užije se v n(a,b). Proto D(a,b).n(a,b) je tvořen všemi mocninami prvočísel rozkladů čísel a,b.

3.2 z-adické číselné soustavy

3.2.1 $(36)_{(10)} = (100100)_{(2)} = (1100)_{(3)} = (210)_{(4)} = (44)_{(8)} = (00110110)$. $(25)_{(10)} = (11001)_{(2)} = (221)_{(3)} = (121)_{(4)} = (31)_{(8)} = (00100101)$. Součty: $(111101)_{(2)} = (2021)_{(3)} = (331_{(4)} = (75)_{(8)} = =(61)_{(10)}$. Rozdíly: $(1011)_{(2)} = (102)_{(3)} = (23)_{(4)} = (13)_{(8)} = =(11)_{(10)}$. Součiny: $(1110000100)_{(2)} = (1020100)_{(3)} = (32010)_{(4)} = (1604)_{(8)} = =(900)_{(10)}$. **3.2.2** a) 7. b) 9. **3.2.3** a) [u; z] = [6; 8]. b) [u; z] = [6; 8]; [u; z] = [9; 12]**;** [u; z] = [12; 16]. **3.2.4** [B; C; E; H] = [4; 1; 3; 2]. **3.2.5** 4; 20; 100; 4.5^{n-1} . **3.2.6** Počet jedniček = počet dvojek = počet trojek = počet čtyřek = 75; počet nul = 44; celkem 344 číslic.

4. Výrazy

4.1 Vzorce

4.1.1 a) $a^{y-4x}.b^{6x-13y-1}; a, b \neq 0$. b) $\frac{(x-y)^{1-a}}{(x+y)^{a+3}.(u-v)^3.(u+v)}$; $u \neq \pm v, x \neq \pm y$. c) $(a-b)^{2m}$; $a \neq -b, x \neq \pm y$. **4.1.2** a) $\frac{\sqrt[15]{x^{11}}}{x}$; x > 0. b) $x^3.\sqrt[6]{x^5}$; x > 0. c) $\frac{4\sqrt[3]{4}}{5\sqrt{5}}$. **4.1.3** a) $a^{2x} - 4a^{3x} + 4a^{4x}$. b) $a^{4x}\left(a^{\frac{2}{x^2}} + 2a^{\frac{1}{x^2}} + 1\right)$; a > $0, x \neq 0$. c) $a^{6x}\left(a^{\frac{3}{x^2}} - 3a^{\frac{2}{x^2}} + 3a^{\frac{1}{x^2}} - 1\right)$; a > $0, x \neq 0$. d) $\frac{1}{a^{\frac{3}{x}} + 3a^{\frac{2+x^2}{x}} + 3a^{\frac{1+2x^2}{x}} + a^{3x}}$; a > $0, x \neq 0$. **4.1.4** a) $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$; $a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$; $a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$; b) $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$; $(a \pm b)(a^4 \mp a^3b + a^2b^2 \mp ab^3 + b^4)$.

4.2 Rozklady mnohočlenů

4.2.1 a) $(x-5)(12-x)$. b) $(2x-1)(3x+7)$. c) $(y-1)^2(y^2+1)$. d) $(y-2)^2(y+1)$. e) $(a+1)(a^2+2a+2)$. f) $(b^2+1)(2b^2+b+2)$. **4.2.2** a) $(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)$. b) $(a+1)(a^6-a^5+a^4-a^3+a^2-a+1)$. c) $(2-a)(2+a)(4+a^2)(16+a^4)$. **4.2.3** a) $(a-b)(x^2-x+1)$. b) $(a+1)^2(a-1)(a^2-a+1)$. c) $(a+b)(b+c)(c-a)$. d) $ab(a-b)$. e) $(x-y)(x-z)(z-y)$. **4.2.4** a) $3(x-z)(y-z)(y-x)$. b) $3(x+z)(y+z)(y+x)$. c) $3abc(b-a)(a-c)(b-c)$. **4.2.5** a) $(p-q)^2(p+q)^2(a+b)^2(a-b)^2$. b) $3(y^2+z^2)(y^2+x^2)(x^2-z^2)$.

4.3 Úpravy lomených výrazů

4.3.1 a + b + c; a, b, c ≠ 0, a ≠ b, a ≠ c, b ≠ c. **4.3.2** $\frac{(\mathrm{a+b+c})^2}{2\mathrm{bc}}$; a, b, a ≠ b + c, b ≠ - c. **4.3.3** $\frac{3(a+2)(2a+5)(3a+1)(a-3)}{(1-3a)(1-a)(1+a)}$; $a \neq \pm 1, a \neq 0, a \neq \frac{1}{3}$; **4.3.4** $\frac{1-x}{9+x}$; $x \neq \pm 9, x \neq -3$. **4.3.5** $\frac{a(a-b-c)}{2}$; a, b, c $\neq 0$, a $\neq$ b + c, a + b + c $\neq 0$, b $\neq -$ c. **4.3.6** $\frac{a-b}{a+b}$; a, b $\neq 0$, a $\neq \pm$ b, b $\neq -3$a. **4.3.7** 3x + y + 2; y $\neq$ 3x, 3x + y $\neq$ 2. **4.3.8** $\frac{1}{c(a+c)}$; a $\neq \pm$c , $a \neq c^2 + c$, c $\neq 0$.

4.4 Úpravy výrazů s odmocninami

4.4.1 $2\sqrt[3]{x}$; x $\geq$ 0. **4.4.2** $\frac{2ab}{a^2-4b^2}$; a > 0, b > 0, a $\neq$ 2b. **4.4.3** 1; x $\geq$ 4. **4.4.4** 1 - $\frac{2a}{3b}$; a > 0, b > 0, a $\neq$ 1. **4.4.5** $\sqrt{2+a}$; $|a| < 2$. **4.4.6** $\frac{b-a}{\sqrt{ab}}$; a > 0, b > 0, a $\neq$ b. **4.4.7** $\sqrt{9-a^2}$; $0 < a < 3$, $a \neq 1$. **4.4.8** $-\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{x}$; x > 0, y > 0, x $\neq y$. **4.4.9** Pro **x** > 0, x $\neq$ 1: $\frac{2}{x(x-1)}$; pro x< 0, x $\neq -1$: $\frac{-2(2x+1)}{x(x+1)}$. **4.4.10** a; a > 0. **4.4.11** $\frac{\sqrt[6]{(a-b)^5}}{a-b}$; a + b > 0, a - b > 0. **4.4.12** 3; x > 0, y $\geq$ 0, x $\neq y$.

5. Rovnice a nerovnice a jejich soustavy

5.1 Rovnice a nerovnice s odmocninami

5.1.1 $\langle -1,1\rangle$. **5.1.2** $< 2, \infty)$. **5.1.3** 2. **5.1.4** $\langle 5,10\rangle$. **5.1.5** 15. **5.1.6** 0; -5. **5.1.7** ±12. **5.1.8** -2; 27. **5.1.9** 0; 2. **5.1.10** -1; $\frac{9}{16}$. **5.1.11** 19, 84. **5.1.12** 64; -27. **5.1.13** 4. **5.1.14** 2.

5.1.15 a) (-1-$\sqrt{5}$, -3> ∪ < 1, $\sqrt{5}-1$). b) < $\frac{5}{2}$, 3). c) (-∞, -2> ∪ < 5, $\frac{74}{13}$). **5.1.16** a) <-1, -$\frac{\sqrt{3}}{2}$) ∪ ($\frac{\sqrt{3}}{2}$, 1>. b) <1, $\frac{3}{2}$). **5.1.7** <-1, $\sqrt[3]{4}$). **5.1.18** $< -\sqrt{3}$, 0) ∪ (0, 2 >.

5.2 Rovnice s parametrem

5.2.1 Pro a = 4 vyhovují rovnici všechna reálná čísla, pro a ≠ 4 je kořenem číslo x = a + 4. **5.2.2** Pro a = 1 vyhovují rovnici všechna reálná čísla, pro a = -1 nemá rovnice řešení, pro a$\neq \pm 1$ je řešením číslo x= - $\frac{1}{a+1}$. **5.2.3** Pro a = $\frac{1}{2}$ vyhovují rovnici všechna reálná čísla**,** pro a ≠ $\frac{1}{2}$ je x = -2. **5.2.4** Pro a = 3 vyhovují rovnici všechna reálná čísla, pro a =0 nemá rovnice řešení, pro a$\neq 0$, a $\neq 3$ je řešením číslo x= $\frac{1}{a}$. **5.2.5** Pro p = 1 vyhovují rovnici všechna reálná čísla, pro p = -1 nemá rovnice řešení, pro p$\neq \pm 1$ řešením číslo x= $-\frac{2}{p+1}$. **5.2.6** a ϵ $\langle -\frac{5}{8}$; ∞). **5.2.7** a = 1, a = -7. **5.2.8** a) m < -3. b) m > 2. **5.2.9** Pro m ϵ {13; 1} rovnice nemá řešení, pro m ≠ 1, m ≠ 13 je x = $\frac{2-2m}{m-13}$. **5.2.10** Pro k = $-\frac{1}{2}$ je řešením každé x ≠ ±2, pro k ≠ $-\frac{1}{2}$ je x= 0. **5.2.11** Pro a = 1 je řešením každé x ≠ 0, pro a ≠ 1 je x = 1+ a. **5.2.12** Rovnice má smysl pro p$\neq 0$, pro p = 2 nemá řešení, pro p = -2 vyhovují rovnici všechna reálná čísla, pro p ≠0, p$\neq \pm 2$ je kořenem x = $\frac{1}{p(p-2)}$.

5.3 Rovnice vyšších stupňů v R

5.3.1 a) 0. b) 0; $\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$. c) 0; $\pm\frac{1}{2}$. d) ±2. **5.3.2** a)-1; 2; $\frac{1}{2}$. b) -1. **5.3.3** a) ±1; $\frac{4}{3}$; $\frac{3}{4}$. b) -3±2$\sqrt{2}$; ±1; **5.3.4** a) -1; 2; $\frac{1}{2}$. b) -1; 3; $\frac{1}{3}$; -2; -$\frac{1}{2}$. **5.3.5** a) 1; 4. b) -2; $\frac{2}{3}$. c) ±1. d) $\pm\sqrt[4]{3}$. **5.3.6** a) -2; 3. b) $\pm\sqrt[4]{5}$. **5.3.7** a) 3. b) 4. **5.3.8** a) -1; 3. b) -2; 4.

5.4 Soustavy rovnic

5.4.1 [7,2], [−7, −2]. **5.4.2** [5,3]**. 5.4.3** [2,2]**. 5.4.4** [20,10], [10,20], $\left[\frac{-33\mp\sqrt{37}}{2}, \frac{-33\pm\sqrt{37}}{2}\right]$. **5.4.5** [−27, −216], [216,27]. **5.4.6** [26,10]. **5.4.7** [4,4]. **5.4.8** [4,2,1]. **5.4.9** [1,2,3,4]. **5.4.10** [1,1,1,1]. **5.4.11** Pro a = -1 nemá soustava řešení, pro a = 1 má nekonečně mnoho řešení $[1-t, t]$**,** kde

$t \epsilon$ R, pro a $\neq \pm 1$ má jediné řešení $\left[\frac{1}{1+a}, \frac{1}{1+a}\right]$. **5.4.12** Pro každé a $\boldsymbol{\epsilon}$ R má soustava jediné řešení $\left[\frac{8+3a}{6+a^2}, \frac{4a-9}{6+a^2}\right]$. **5.4.13** Soustava má smysl pro a$\neq -1$, pro a = 1 má nekonečně mnoho řešení $[0, t]$**,** kde $t \epsilon$ R\ {0}, pro a$\neq \pm 1$ má soustava řešení $[a^2 - 1, a + 1]$**,** $[1 - a^2, -a - 1]$.

5.5 Problémové úlohy

5.5.1 Pouze arabsky 2, právě dvěma jazyky 34. **5.5.2** Na obědy i večeře 67, na večeře 68, jen na obědy 48. **5.5.3** V turistickém 86, v recitačním a současně fotografickém nikdo. **5.5.4** a) 5. b) 9. c) 3. **5.5.5**
a) 52. b) 114. **5.5.6** MO 12; FO 8; SOČ 9. **5.5.7** a) 25. b) 85. **5.5.8** a) 0. b) 6. **5.5.9** a) 11. b) 10. c) 10.

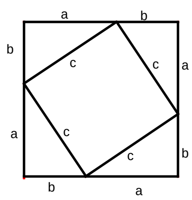
6. Planimetrie

6.1 Početní úlohy

6.1.1 $\frac{n(n+1)}{2} + 1$. **6.1.2** 90°+ $\frac{\gamma}{2}$. **6.1.3** 45° . **6.1.4** $\frac{4}{3}$ **.** **6.1.5** S = 2,5 r^2.sin 72°, o = 10r. $\sin 36^\circ$. Pro libovolné n ≥ 3: S = $\frac{n}{2}$. r^2.sin $\frac{2\pi}{n}$. o =2n.r.sin $\frac{\pi}{n}$. **6.1.6** S = 588cm^2, o = 86,96cm. **6.1.7** S = 2(c^2+ab). **6.1.8** S = 3a^2.(7 - 4$\sqrt{3}$), o = 4a.(2$\sqrt{3} - 3$). **6.1.9** 6$\sqrt{2}$cm.

6.2 Důkazové úlohy

6.2.1 Plyne z definice vnějšího úhlu mnohoúhelníku a součtu jeho vnitřních úhlů. **6.2.2** Jsou-li A_1, B_1, C_1 středy stran BC, AC, AB, pak sečtením trojúhelníkových nerovností pro ΔABA_1, ΔBCB_1, ΔCAC_1 dostaneme $\frac{1}{2}$.(a + b + c) < $t_a + t_b + t_c$; určíme bod D tak, aby $|AD|$= 2t_a, A_1 byl střed AD; z ΔABD plyne b + c > 2t_a; analogicky a + b > 2t_c, a + c > 2t_b ; sečtením vztahů dostaneme $t_a + t_b + t_c$ < a + b + c. **6.2.3** Užijte vlastnost těžnice trojúhelníka; označte X, Y středy postupně stran BC, CD, S střed rovnoběžníka; AX, BS jsou těžnice ΔABC, AY, DS jsou těžnice ΔACD. **6.2.4** ΔANC ≅ ΔABM (sus). **6.2.5** ΔDCB ≅ ΔACG (sus). **6.2.6** Plyne z vyjádření obsahu pomocí stran a příslušných výšek. **6.2.7** Užijte obr. a upravte vztah $(a + b)^2$ = $c^2 + 4.\frac{ab}{2}$. **6.2.8** Užijte podobnosti trojúhelníků ΔACP ~ ΔCBP ~ ΔABC, kde P je pata výšky z bodu C na přeponu AB. **6.2.9** Z bodů C, D veďte kolmice k AB; užijte Pythagorovu větu pro všechny vzniklé pravoúhlé trojúhelníky. **6.2.10** Užijte vzorec pro obsah kruhu a trojúhelníka. 6.2.12 Užijte vztah mezi obvodovými a úsekovými úhly. **6.2.13** Užijte osovou souměrnost $O(\leftrightarrow AB)$.



6.3 Mnohoúhelníky

6.4 Mocnost bodu ke kružnici

6.4.1 6$\sqrt{2}$. **6.4.2** 6$\sqrt{2}$. **6.4.3** Je-li M průsečík přímky AB s přímkou p, pak $|MT|^2$=|MA|. |MB|, T je bod dotyku na p. K sestrojení délky MT užijeme Euklidovu větu. Je-li AB ∥ p, leží T v průsečíku osy AB s p.

6.5 Eukleidovské konstrukce

6.5.1 Bodem M lib. přímku, která protne kružnici v bodech A, B. Platí $|MT|^2$ = |MA|. |MB|, T je bod dotyku. |MT| sestrojte pomocí Eukl. věty. **6.5.2** Sestrojte k(M, r) tak, aby protínala p v bodech A, B. D ∈ k_1(M, |AB|) ∩ k_2(B, |MA|). ↔MD ∥ p. **6.5.3** Sestrojte k(M, r) tak, aby protínala p v bodech A, B a osu úsečky AB.

6.6 Konstrukční úlohy řešené užitím množin bodů dané vlastnosti, úlohy s parametrem

6.6.1 Dvě rovnoběžné přímky p_1, p_2 ; $p_1 \parallel p_2 \parallel a$, $|a, p_1| = |b, p_2|$ =1 cm, $|a, p_2| = |b, p_1| = 5$ cm. **6.6.2** Kružnice k(O, $\frac{|AB|}{3}$) kromě průsečíků této kružnice s přeponou AB; O je střed přepony. **6.6.3** $|BC|$ = a; S ϵ ($k_1 \cup k_2$) $\cap$ ($p_1 \cup p_2$), k_1, k_2 jsou kružnicové oblouky BC pro obvodový úhel $90° + \frac{\alpha}{2}$, $p_1 \parallel p_2 \parallel$ BC, $|p_1, \leftrightarrow BC| = |p_2, \leftrightarrow BC| = \rho$. **6.6.4** $|AB|$ = 7,5 cm, $|\sphericalangle BAX| = \alpha = 30°$; S ϵ $p_1 \cap p_2$, $|p_1, \leftrightarrow AB| = |p_2, \leftrightarrow AX| = \rho$ = 2,5 cm; k(S, ρ); z bodu B tečna t ke k(S, ρ). **6.6.5** γ = 180°- α, δ = 180°- β; Strany čtyřúhelníka leží na tečnách kružnice k(S, ρ), které svírají po řadě úhly $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. **6.6.6** $d > 3\sqrt{3}$ cm… 2 řešení, $d = 3\sqrt{3}$ cm… 1 řešení, $0 < d < 3\sqrt{3}$ cm…0 řešení. **6.6.7** $\pi > \alpha > \frac{\pi}{6}$… 0 řešení, $0 < \alpha < \frac{\pi}{6}$… 2 řešení, $\alpha = \frac{\pi}{6}$…1 řešení. **6.6.8** $h > 2\sqrt{3}$ cm… 0 řešení, $h = 2\sqrt{3}$ cm… 1 řešení, $0 < h < 2\sqrt{3}$ cm…2 řešení. **6.6.9** tg $\frac{\varepsilon}{2} = 3$ …1 řešení, tg $\frac{\varepsilon}{2} < 3$ …0 řešení, tg $\frac{\varepsilon}{2} > 3$ …2 řešení.

6.7 Zobrazení: konstrukční úlohy řešené využitím shodných zobrazení a stejnolehlosti, skládání zobrazení

6.7.1 ΔEFC: $|EF|$ = o = 12 cm, $|\sphericalangle CEF| = 30°$, $|\sphericalangle EFC| = 22°30'$; A ϵ $o_1 \cap$ EF, o_1 je osa úsečky EC; B ϵ $o_2 \cap$ EF, o_2 je osa úsečky FC. **6.7.2** ΔAFB: $|AF|$ = a + e = 10 cm, $|\sphericalangle FAB| = 45°$, $|\sphericalangle AFB| = 22°30'$; C ϵ o $\cap$ AF, o je osa úsečky BF. **6.7.3** ΔAFD: $|DF|$ = a + f , $|\sphericalangle ADF| = 90° - \frac{\alpha}{2}$, $|\sphericalangle AFD| = 45° - \frac{\alpha}{4}$; B ϵ o $\cap$ DF, o je osa úsečky AF. **6.7.4** ΔAFC: $|AF|$ = a - b = 1 cm, $|AC|$= e = 7 cm, $|\sphericalangle AFC| = 135°$; B ϵ o $\cap$ AF, o je osa úsečky EC. **6.7.5** ΔAED: $|AE| = |BC|$ = 3 cm, $|AD|$= 2 cm, $|\sphericalangle EAD| = \alpha - \beta = 20°$. **6.7.6** Užijte středovou souměrnost S (S). **6.7.7** Bod A je samodružný bod ve středové souměrnosti $S = S(S_5) \circ S(S_4) \circ S(S_3) \circ S(S_2) \circ S(S_1)$; A je středem každé úsečky XX´, kde S: X→ X´. **6.7.8** Užijte středovou souměrnost S (S). **6.7.9** Užijte posunutí o délku d, jehož směr je kolmý k toku řeky. **6.7.10** Sestrojte libovolnou tětivu X´Y´ kružnice, která má délku d, a kružnicové oblouky X´Y´ pro obvodový úhel 60°; Pak užijte otočení o středu S. **6.7.11** Užijte otočení R (S; $\pm$ 60°). **6.7.12** Nepřístupný průsečík přímek p, q zvolte za střed stejnolehlosti. Sestrojte ΔABC: B ϵ p, C ϵ q a ΔA´B´C´ s ním stejnolehlý: B´ ϵ p, C´ϵ q, A´B´ ∥ AB, A´C´ ∥ AC. Přímka AA´ je spojnicí bodu A a nepřístupného průsečíku přímek p, q. **6.7.13** Podle 6.7.12 spojte body A, B; zvolte S ϵ p a veďte lib. přímku a ∥ ↔AB; Sestrojte ΔSA´B´: A´ ϵ a $\cap$ SA, B´ ϵ a $\cap$ p; určete střed O´ úsečky A´B´; O ϵ AB $\cap$ →SO´. **6.7.14** Střed stejnolehlosti kružnic k, l je v bodě T dotyku kružnic. Sestrojte tečnu kružnice l rovnoběžnou s t a její bod dotyku A´; T ϵ ↔AA´$\cap$ l . **6.7.15** Bod dotyku T kružnic k, l je středem stejnolehlosti kružnic. Sestrojte tečny a´, b´ kružnice k rovnoběžné po řadě s přímkami a, b; V ϵ a $\cap$ b, V´ ϵ a´ $\cap$ b´; T ϵ ↔VV´$\cap$ k. Střed hledané kružnice S´: S´ ϵ ↔ TS $\cap$ o, o je osa úhlu přímek a, b. **6.7.16** Užijte zobrazení $Z = R$(A; $\pm$60°) ∘ H(A; 2); Z: p → p´; C ϵ ↔ p´$\cap$ h. **6.7.17** Užijte zobrazení $Z = R$(K; $\pm$90°) ∘ H(K; 0,5); Z: k → k´; N ϵ k´$\cap$ h. **6.7.18** Užijte zobrazení $Z = R$(K; $\pm$30°) ∘ H(K; $\frac{\sqrt{3}}{2}$); Z: p → p´; C ϵ p´$\cap$ q. **6.7.19** Užijte zobrazení $Z = R$(A; $\pm$30°) ∘ H(A; $\frac{\sqrt{3}}{3}$); Z: k_1 → k'_1; T ϵ $k_2 \cap k'_1$. **6.7.21** a) O(↔AB). b) O(o), o je osa úsečky AH. c) S(S) = O(↔SC) ∘ O(↔SE). d) R(S; 45°). e) R(S; - 90°) = O(↔SH) ∘ O(↔SA). **6.7.22** $k = \sqrt{2}$.

6.8 Konstrukce algebraických výrazů

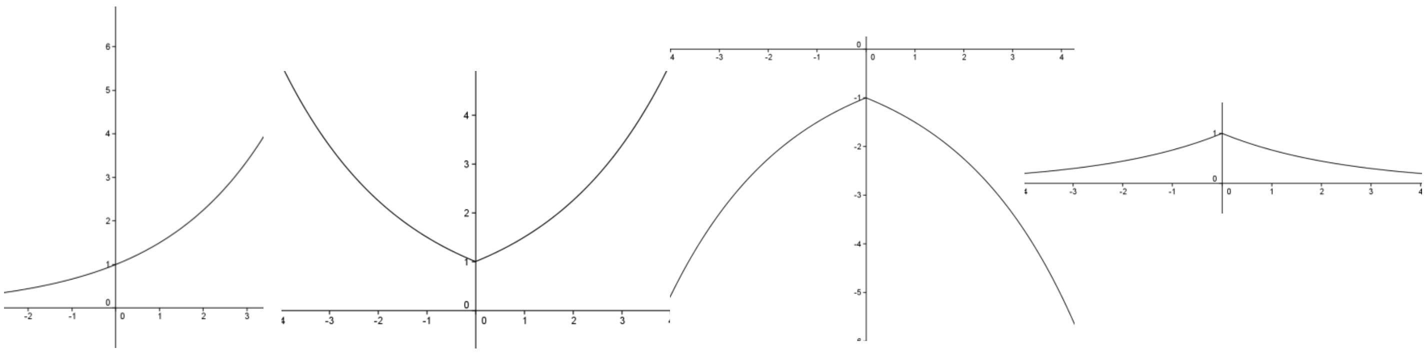
Využijte Pythagorovou větu (P.v.) , Euklidovy věty (E,v.) a čtvrtou geometrickou úměrnou (č.g.ú.). **6.8.1** a) $\sqrt{2}=\sqrt{1^2+1^2}$ (P.v.), pak $\sqrt[4]{2}=\sqrt{\sqrt{2}.1}$ (E.v.). b) $\sqrt{3}=\sqrt{2^2-1^2}$ (P.v.), pak $\sqrt[4]{3}=\sqrt{\sqrt{3}.1}$ (E.v.). **6.8.2** a) m = a$\sqrt{2}$, n = b$\sqrt{3}$ pomocí č.g.ú. (m : a = $\sqrt{2}:1$, n : b = $\sqrt{3}:1$) , pak součet m + n. b) m = $\sqrt{5}$ (P.v.), pak $x=\sqrt{\frac{a}{3}.m}$ (E.v.). c) $\sqrt[4]{2}$ podle 6.8.1a), pak x = $\frac{a\sqrt[4]{2}}{b}$ pomocí č.g.ú. (x: a = $\sqrt[4]{2}:b$). d) x : a = b : (a + b) pomocí č.g.ú.. e) x : a = b : (a - b) pomocí č.g.ú.. f) m = $\sqrt{a^2-b^2}$ (P.v.), pak pomocí č.g.ú. (x : 1 = m : (a + b)). **6.8.3** a) m = $\sqrt{bc}$ (E.v), x = $\sqrt{a^2-m^2}$ (P.v). b) m = $\sqrt{a^2+b^2}$, x = $\sqrt{m^2+c^2}$ (P.v.). c) m = $\sqrt{a^2+b^2}$ (P.v.), n = $\sqrt{ab}$ (E.v.), x= $\sqrt{m^2+n^2}$ (P.v). d) m = $\sqrt{a^2+b^2}$ (P.v.), pak pomocí č.g.ú. $\frac{x}{m}=\frac{a}{c}$. e) m = $\sqrt{bc}$ (E.v.), n = $\sqrt{m^2+a^2}$ (P.v), pak pomocí č.g.ú. $\frac{x}{1}=\frac{n}{a}$. f) m = $\sqrt{a^2-b^2}$ (P.v), pak pomocí č.g.ú. $\frac{x}{1}=\frac{m}{c}$. g) n = $\sqrt{bc}$ (E.v.), m = $\sqrt{a^2-b^2}$ (P.v), q = $\sqrt{n^2+a^2}$ (P.v.), pak pomocí č.g.ú. $\frac{x}{1}=\frac{m}{q}$. **6.8.4** R = $\sqrt{\frac{r^2}{2}}$ = $\sqrt{r.\frac{r}{2}}$ (E.v.). **6.8.5** R = $\frac{1}{2}\sqrt{r_1^2+r_2^2}$ (P.v.). **6.8.6** a)$|C,p|$ = $\frac{v}{\sqrt{2}}$, kde v = $|C,\leftrightarrow AB|$; (P.v., č.g.ú.). b) Je-li $|AC|>|AB|$, ozn. P patu kolmice z bodu C na stranu AB, $|AP|=m, |AB|=c$; pak $|A,p|$ = $\sqrt{m.\frac{c}{2}}$ (E.v.).

7. Funkce

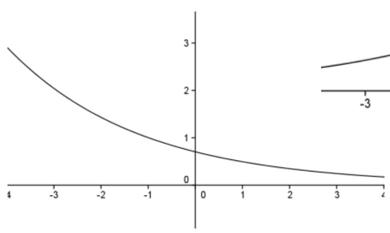
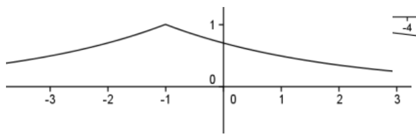
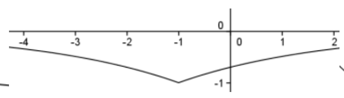
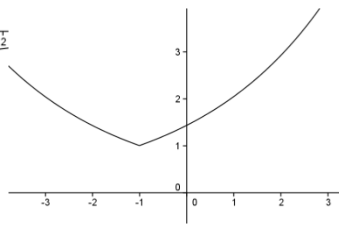
7.1 Exponenciální a logaritmické rovnice a nerovnice

7.1.1 a) $\{3;9\}$. b) $\{7\}$. c) $\left\{\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right\}$. d) $\{-1\}$. e) $\{2\}$. f) $\{0\}$. g) $\{-1\}$. h) $\{0;\ 1\}$. i) $\{-2\}$. **7.1.2** a) $\left\{40;-\frac{1}{3}\right\}$. b) $\{\sqrt{2}\}$. c) $\{10; 0{,}01\}$. d) $\left\{\frac{1}{243};243\right\}$. e) $\{1;4\}$. f) $\{1;10^4\}$. **7.1.3** a)$\langle 2,\infty)$. b) $(-\infty,-5)$. c) $\langle -\frac{2}{3},\infty)$. d) $\langle -7,\infty)$. e) $\langle 3,\infty)$. f) $\left(-\infty,\frac{1}{4}\right)$. **7.1.4** a) $\emptyset$. b) $\left(\frac{4}{5},2\right\rangle$. c) $\left(3,\frac{7+\sqrt{33}}{4}\right)$. d) $(3,8\rangle$. e) $(3,6)$. **7.1.5** a) pro a <-5 ... rost., pro a >3 …kles. b) pro a >0 ... rost., pro a <-1 …kles.

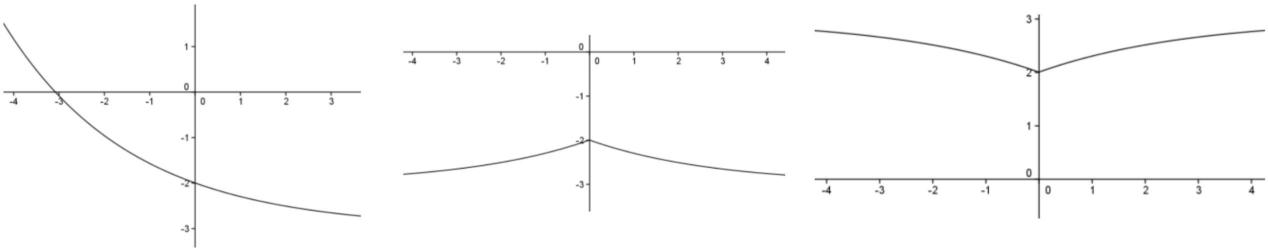
7.1.6 a)



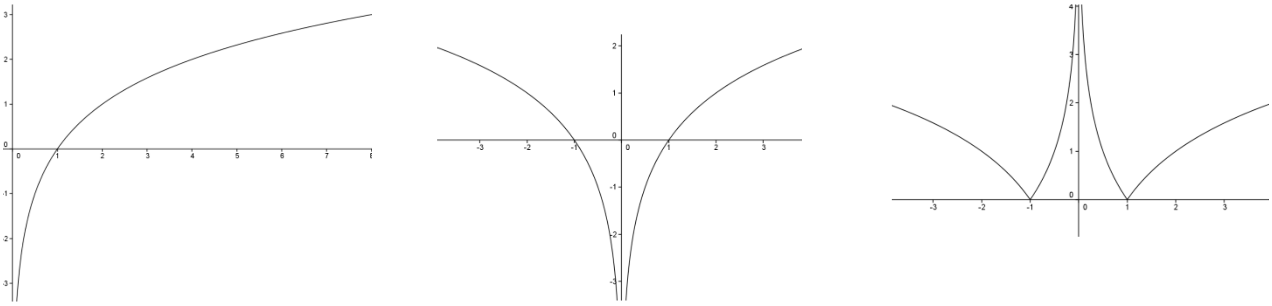
b)

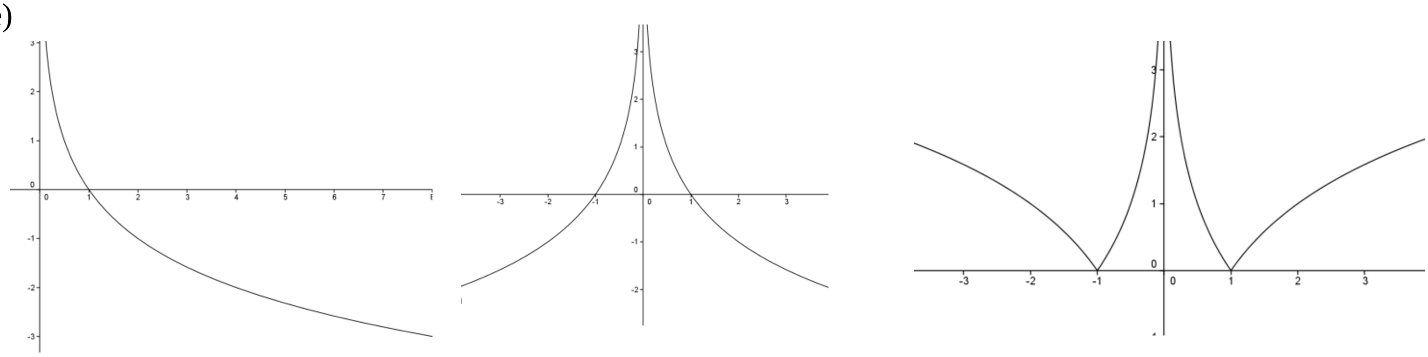
c)



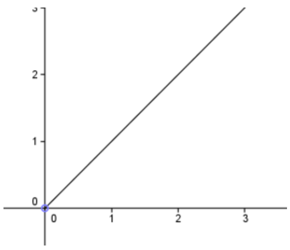
d)



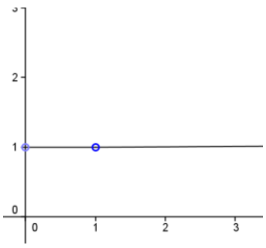
e)



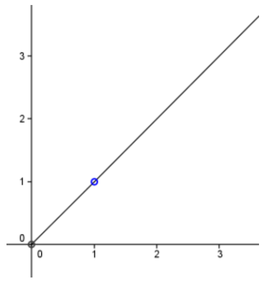
7.1.7 a)



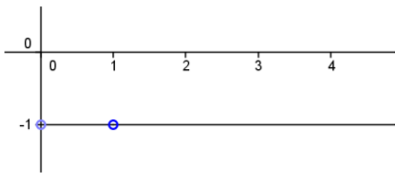
b)



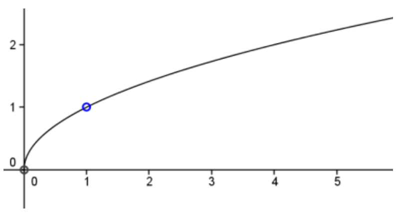
c)



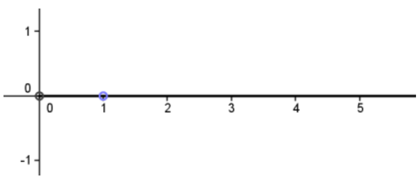
d)



e)

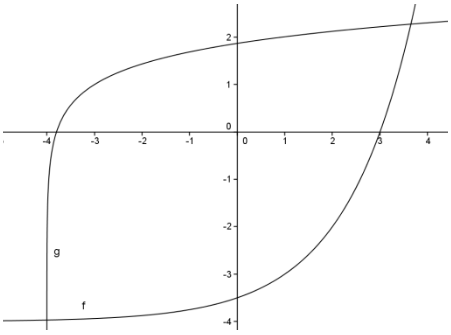


f)

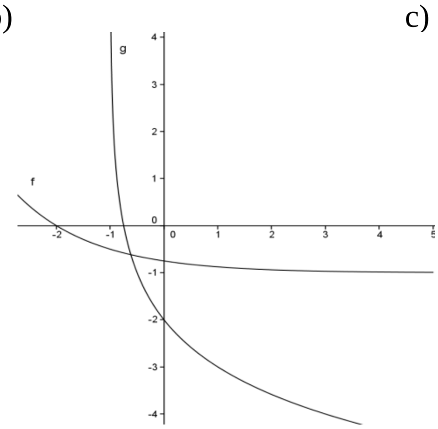


7.1.8 V obr. funkce g = f^{-1}.

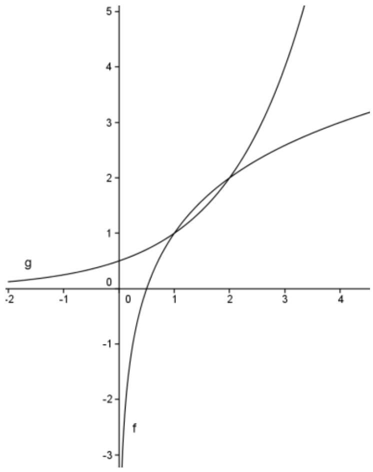
a)



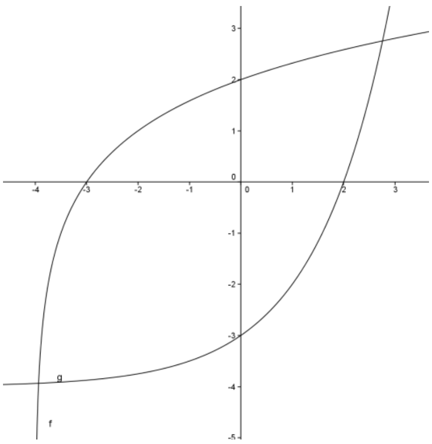
b)



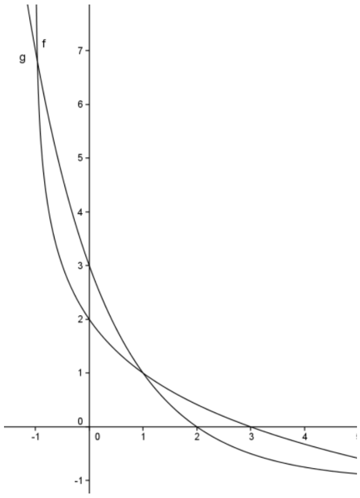
c)



d)



e)



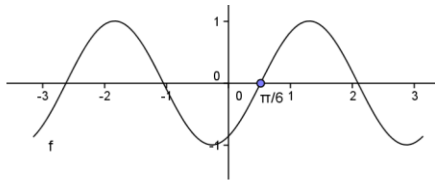
a) D(f) = R, H(f) = (-4;∞); X[3; 0], Y[0; −3,5]; f^{-1}:y = 1+$\log_2$(x + 4); D(f^{-1}) = (-4;∞), H(f^{-1}) = R. b) D(f) = R, H(f) = (-1;∞); X[−2; 0], Y[0; −0,75]; f^{-1}: y = - 2 + $\log_{0,5}$(x + 1); D(f^{-1}) = (-1;∞), H(f^{-1}) = R. c) D(f) = R^+, H(f) = R; X[−0,5; 0], Y neexistuje; f^{-1}: y = 2^{x-1}; D(f^{-1}) = R, H(f^{-1}) = R^+. d) D(f) = (-4,∞), H(f) = R; X[−3; 0], Y[0; 2]; f^{-1}: y = 2^x – 4; D(f^{-1}) = R, H(f^{-1}) = (-4,∞). e) D(f) = (-1,∞), H(f) = R; X[3; 0], Y[0; 2]; f^{-1}: y = $0,5^{x-2}$ – 1; D(f^{-1}) = R, H(f^{-1}) = (-1,∞).

7.2 Goniometrické výrazy, rovnice a nerovnice

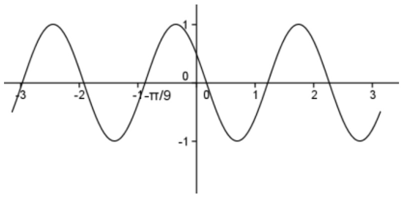
7.2.1 a) $\frac{\mathrm{tg}\, x - \mathrm{tg}\, y}{1+\mathrm{tg}\, x \,.\mathrm{tg}\, y}$. b) $\frac{\mathrm{cotg}\, x \,.\mathrm{cotg}\, y - 1}{\mathrm{cotg}\, x + \mathrm{cotg}\, y}$. **7.2.2** tg 2x = $\frac{2\,\mathrm{tg}\, x}{1-\mathrm{tg}^2 x}$, x≠ $\frac{(2k+1)\pi}{4}$, k ∈ Z. $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$, x≠ $(2k+1)\pi$, k ∈ Z. **7.2.3** x≠ $(2k+1)\pi$, k ∈ Z. **7.2.5** a) $\frac{3}{4}\pi + k\pi$, k ∈ Z. b) $\frac{\pi}{6} + k\pi$, k ∈ Z. c) 1,89 + $k\pi$, k ∈ Z; 1,11 + $k\pi$, k ∈ Z. d) $2k\pi$, k ∈ Z; $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, k ∈ Z. e) $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, k ∈ Z. f) $\frac{23\pi}{12} + 2k\pi$, k ∈ Z; $\frac{5\pi}{12} + 2k\pi$, k ∈ Z. g) $\frac{\pi}{2} + k\pi$, k ∈ Z; $\frac{\pi}{6} + k\pi$, k ∈ Z; $\frac{5\pi}{6} + k\pi$, k ∈ Z. **7.2.6** a) $\bigcup_{k\in Z}\langle\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{3\pi}{4} + k\pi\rangle$. b) $\bigcup_{k\in Z}\langle\frac{5\pi}{12} + k\pi; \frac{13\pi}{12} + k\pi\rangle$. c) $\bigcup_{k\in Z}(\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{5\pi}{4} + k\pi)$. d) $\bigcup_{k\in Z}(\frac{3\pi}{4} + k\pi; \frac{7\pi}{4} + k\pi)$. e) $\bigcup_{k\in Z}\langle\frac{\pi}{4} + k.\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + k.\frac{\pi}{2}\big)$. **7.2.7** a) $\bigcup_{k\in Z}\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right\rangle$. b) $\bigcup_{k\in Z}\left[\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right\rangle \cup \left(\pi + 2k\pi; \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right\rangle\right]$.

7.3 Složené goniometrické funkce

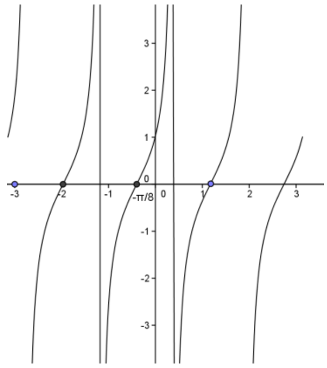
7.3.1 a)



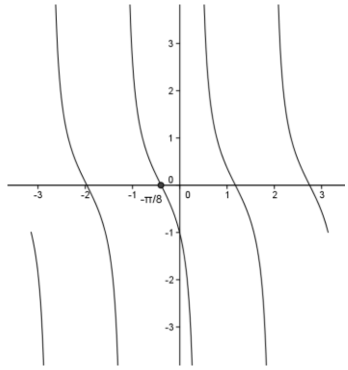
b)



c)

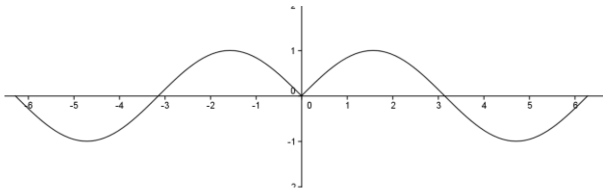


d)

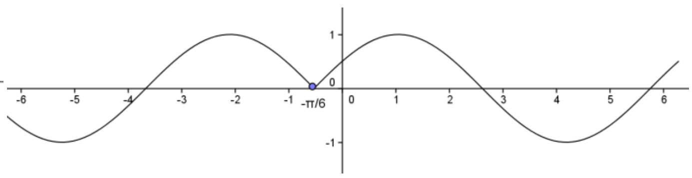


7.3.2

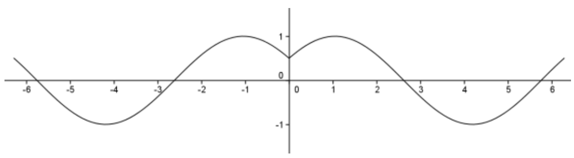
a)



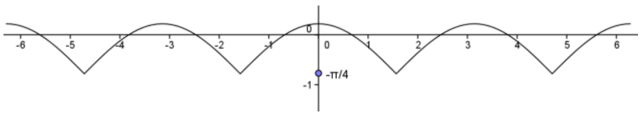
b)



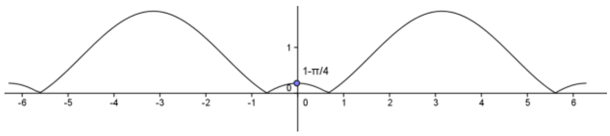
c)



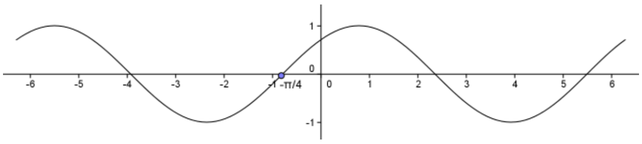
d)



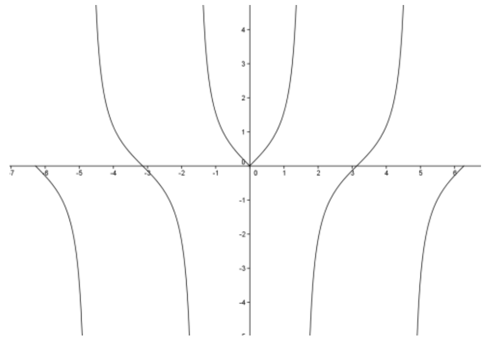
e)



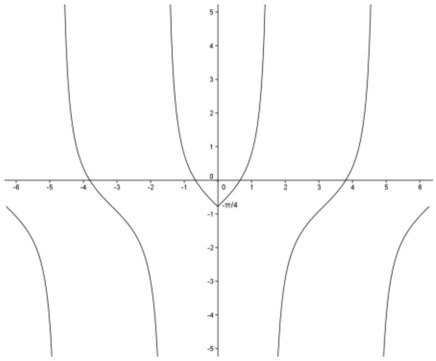
f)



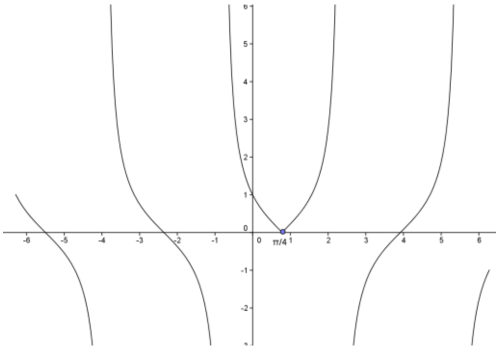
7.3.3a)



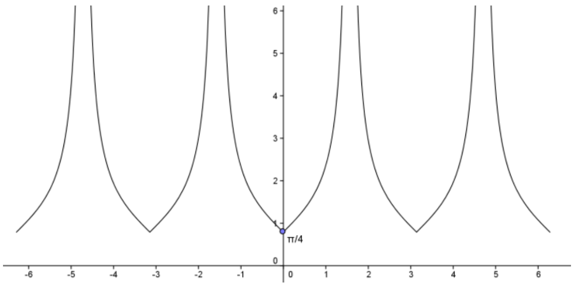
b)



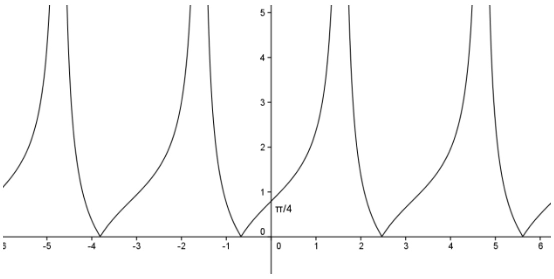
c)



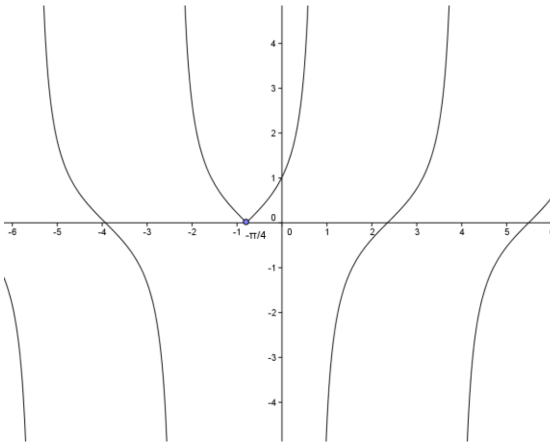
d)



e)



f)

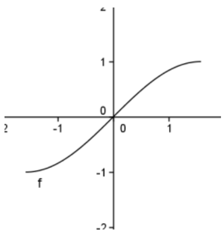


7.4 Cyklometrické funkce

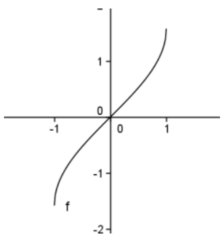
7.4.1

a)

y = sin x



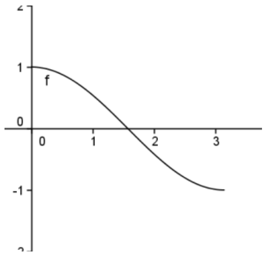
y = arcsin x



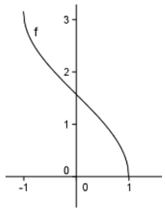
D(arcsin) = $\langle -1,1 \rangle$, H(arcsin) = $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$.

b)

y = cos x

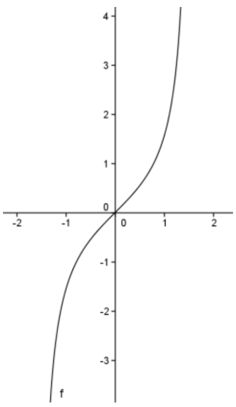


y = arccos x

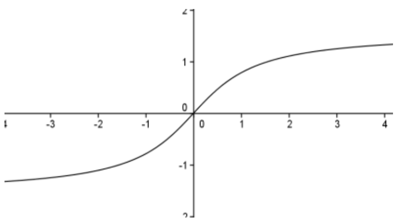


D(arccos) = $\langle -1,1 \rangle$, H(arccos) = $\langle 0, \pi \rangle$.

c) y = tg x

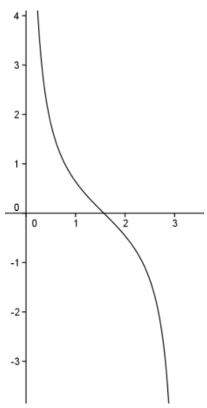


y = arctgx

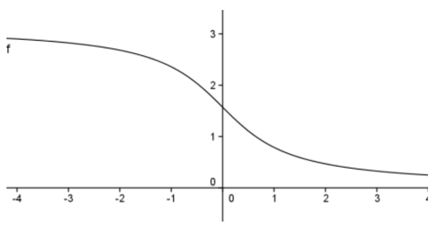


D(arctg) = R, H(arctg) = $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

d) y = cotg x



y = arccotg x



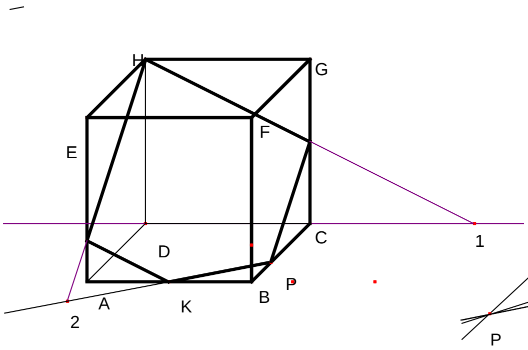
D(arccotg) = R, H(arcctg) = $(0, \pi)$.

8. Stereometrie

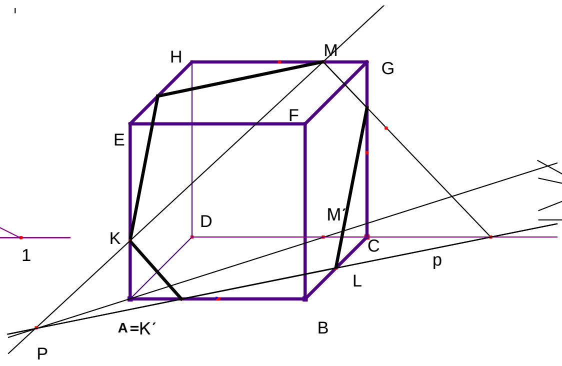
8.1 Polohové úlohy (řez jehlanu a hranolu, průsečík přímky s hranolem a jehlanem, průsečnice rovin)

8.1.1 a) 17. b) 13 – pokud rovina daná zbývajícími body neprochází žádným z daných tří bodů přímky; jinak 7. **8.1.2** a) p ∥ p´, proto p ∥ ↔ pq´. b) p ∥ p´, q ∥ q´, proto ↔ pq´ ∥ ↔ p´q.

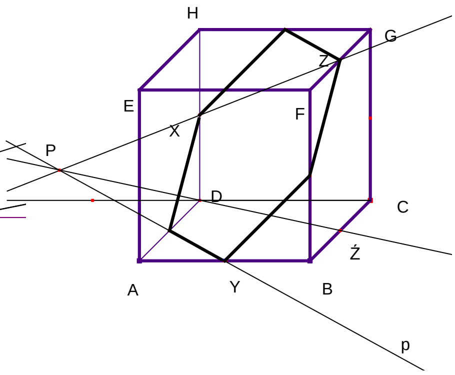
8.1.3



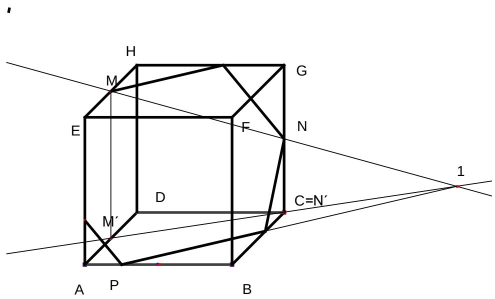
8.1.4



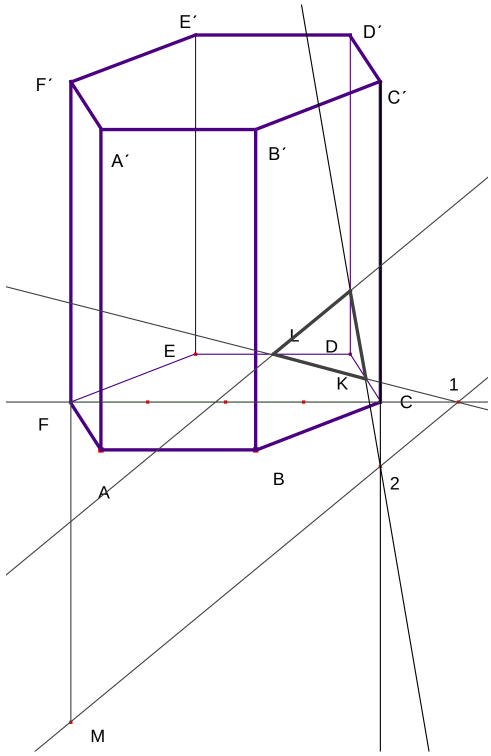
8.1.5



8.1.6

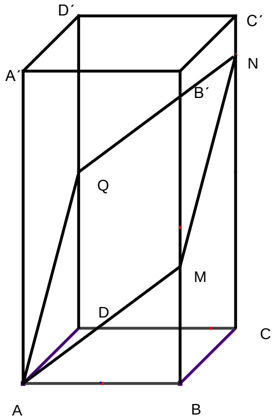


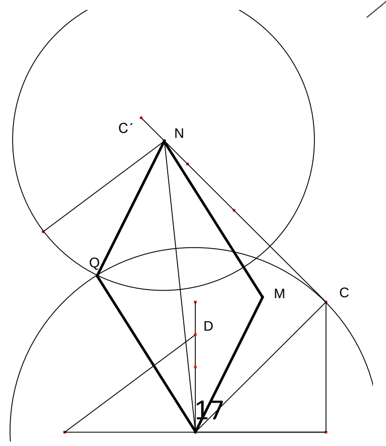
8.1.7



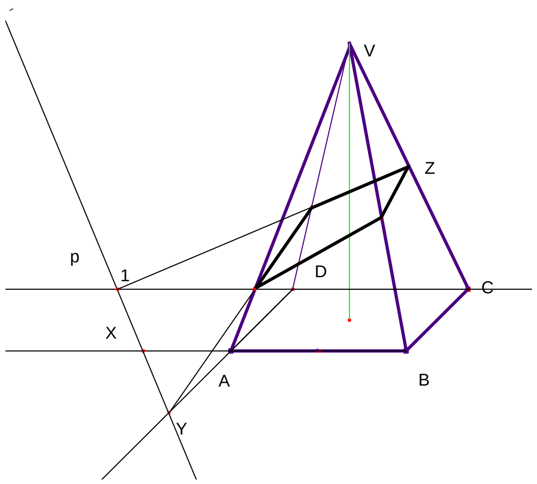
8.1.8 Řezem je rovnoběžník AMNQ, Q je střed DD´.

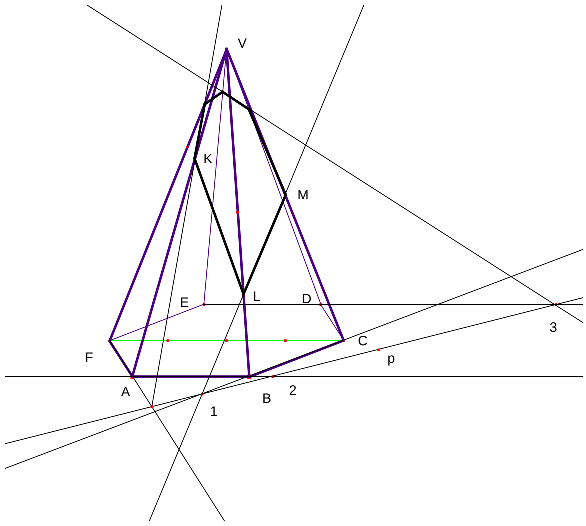
Obsah je $\frac{\sqrt{41}}{4}\,a^2$.



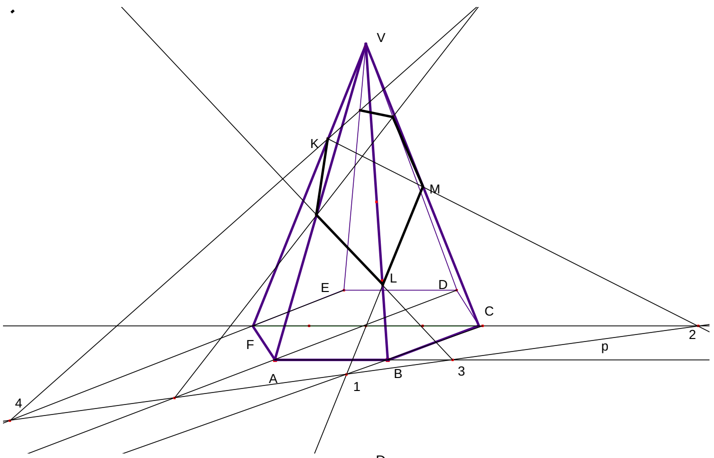


8.1.9 **8.1.10**



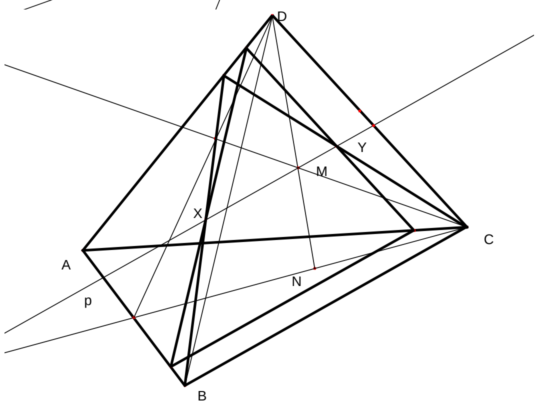


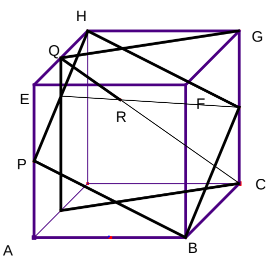
8.1.11



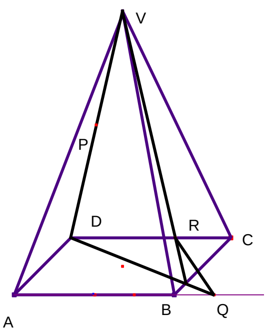
8.1.12 Přímka PQ; Q je průsečík přímek RS a XY, Q je průsečík přímek TU a ZV; U je průsečík hrany GH s přímkou rovnoběžnou s přímkou RS procházející bodem T, V je průsečík hrany GH s přímkou rovnoběžnou s přímkou XY procházející bodem Z. **8.1.13** Přímka XY, X je průsečík přímek MN a A´B´, Y je průsečík přímek NP a B´C´.
8.1.14 Průsečnice je přímka p = ↔XY ‖ BC. (obr.) **8.1.15** Sestrojte řezy kvádru rovinami EKL a DUV a průsečnici těchto rovin; hledaný

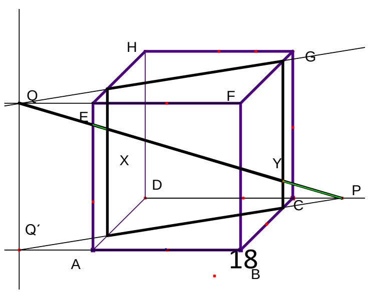
bod je průsečík této průsečnice s rovinou ADH.
8.1.16 **(**obr.)

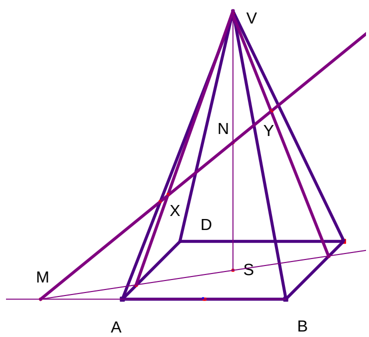




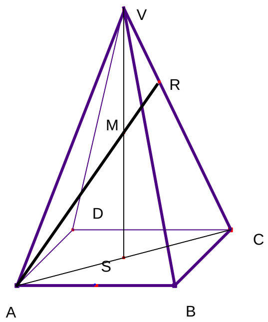
8.1.17 **8.1.18** **8.1.19**

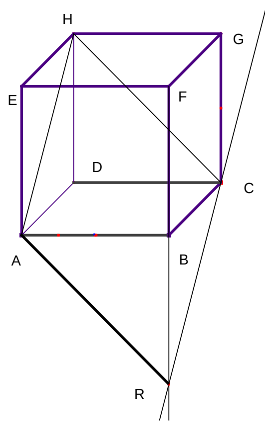


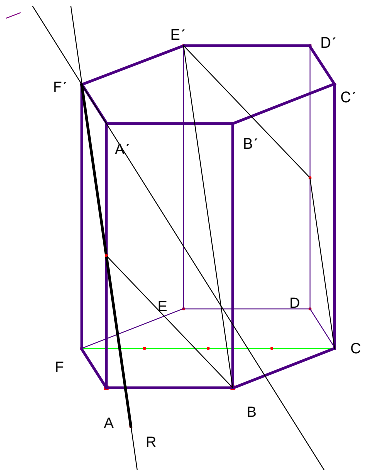




8.1.20 Sjednocení trojúhelníků ABC, ABP a lichoběžníku BCOP, kde bod P je střed úsečky BF. **8.1.21**a) Příčka mimoběžek AH a BF jdoucí bodem D neexistuje. b) AR. **8.1.22** a) AR. b) F´R.

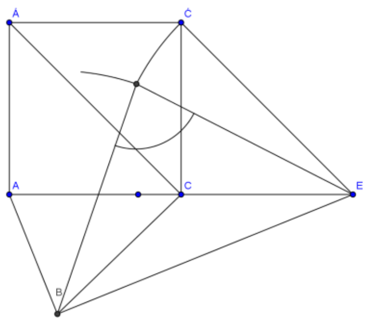






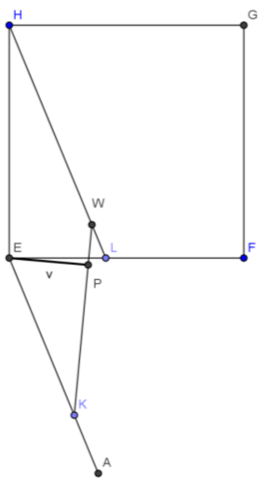
8.2 Metrické úlohy (kolmost, odchylky, vzdálenosti)

8.2.1 $\leftrightarrow BD \perp \leftrightarrow ACG$, proto $\leftrightarrow BD \perp \leftrightarrow EC$; $\leftrightarrow BG \perp \leftrightarrow EFC$, proto $\leftrightarrow BG \perp \leftrightarrow EC$; $\leftrightarrow EC \perp \leftrightarrow BDG$. **8.2.2** **8.2.3** a) PBQH a MBNH jsou kosočtverce. b) Řezem je pravidelný šestiúhelník MUQNVP, kde U, V jsou středy hran CD a EF. **8.2.4** a) Řezem je lichoběžník S_1S_2NM, kde S_1, S_2 jsou středy hran AF a BC; S = 14 cm^2. b) Řezem je pětiúhelník YXNWP, kde W ∈ AV, $|WV| = \frac{1}{4}|AV|$, Y ∈ EF, X ∈ BC, $|FY| = |BX| = \frac{1}{4}$ a; S = $\frac{49\sqrt{3}}{4}$ cm^2. **8.2.5** a) 53°7′. b) 58°16′. **8.2.6** a) 81°55′. Užijte rovnoramenný trojúhelník BEC´, kde E je průsečík přímky AC s přímkou



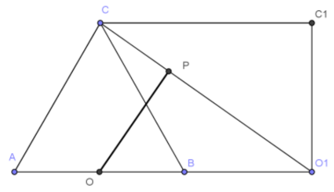
rovnoběžnou s A´C, která prochází bodem C´ (obr.). **8.2.7** 84°31′. **8.2.8** 32°56′. **8.2.9** sin $\varphi = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{v^2+3a^2}}$. **8.2.10** $c = \sqrt{a^2+b^2}$, kde c je výška kvádru. **8.2.11** 45°. **8.2.12** Veďte libovolným bodem (např. F) kolmice k oběma rovinám; jejich odchylka je rovna odchylce rovin; 60°. **8.2.13** 82°49′. **8.2.14** 81°47′. **8.2.15** asi 3,84 cm. **8.2.16** L; $|L, \leftrightarrow \mathrm{AK}| = 0{,}574a$. **8.2.17** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

8.2.18 Veďte bodem E rovinu kolmou k ↔ KHL; v= $|EP|$ **.** (obr.**).**



8.2.19 $\frac{2ac}{\sqrt{a^2+8c^2}}$ **. 8.2.20** $\frac{\sqrt{m^2-a^2-b^2}}{2}$. **8.2.21** $\frac{a}{2}\sqrt{2\sqrt{10}-3}$. **8.2.22** Přímkou A´C veďte rovinu ρ rovnoběžnou s přímkou AB; v = $|\rho, \leftrightarrow AB| = |OP|$**.** (obr.).

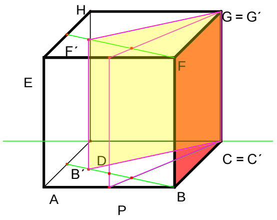
8.2.23 $\frac{a}{2}\sqrt{2}$. **8.2.24** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. **8.2.25** $\frac{3a^2b}{2tg\frac{\varphi}{2}}$. **8.2.26** 135,48 cm^2. **8.2.27** 8,07 cm.



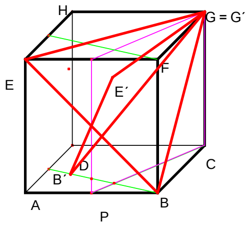
8.3 Shodná a podobná zobrazení v prostoru

8.3.2 a) Průsečnice rovin souměrností úseček AB, BC, AC, tj. přímka kolmá k rovině ABC, která prochází středem kružnice opsané trojúhelníku ABC. b) Střed kulové plochy opsané čtyřstěnu ABCD.

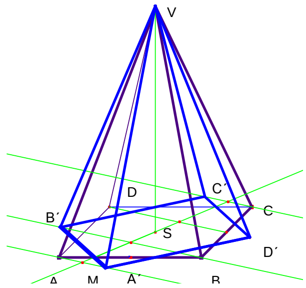
8.3.3 a)



b)

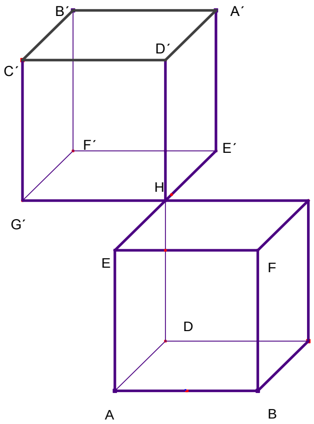


8.3.4

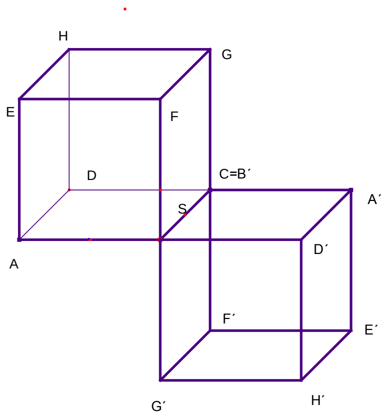


8.3.5 Zobrazte bod M v rovinové soum. podle roviny ABC, X je průsečík přímky EM´ s ↔ABC.

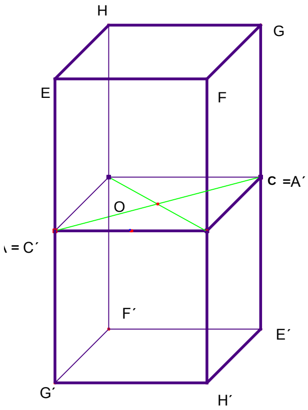
8.3.7a)



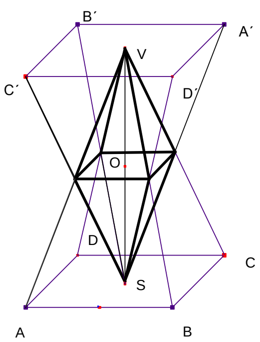
b)



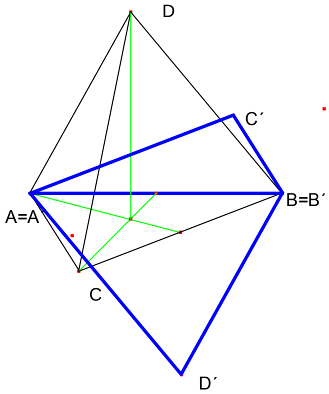
c)



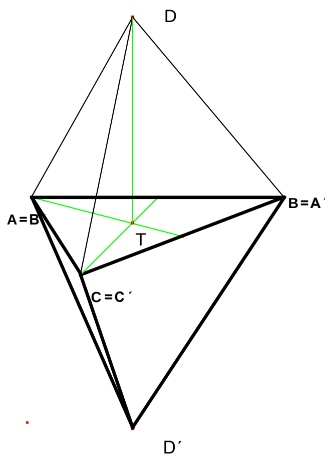
8.3.8



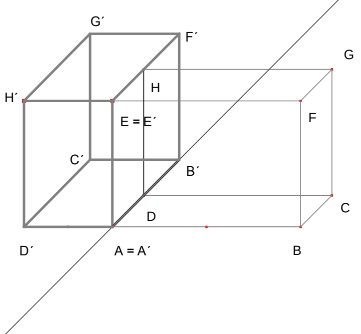
8.3.10a)



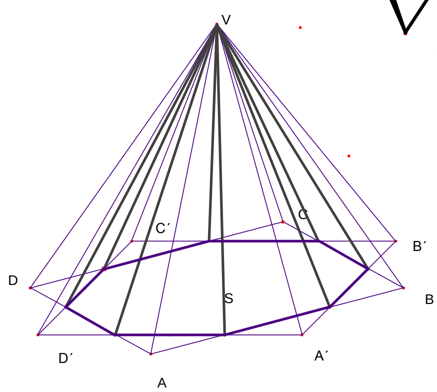
b)



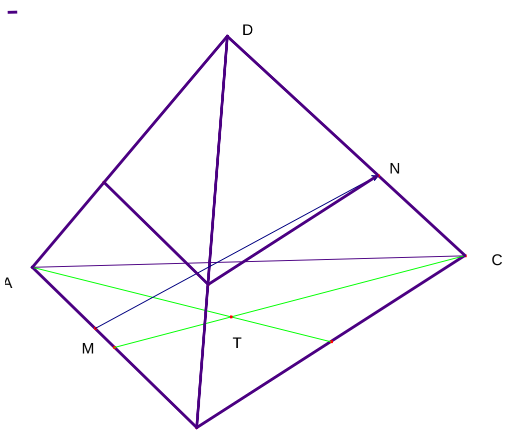
8.3.12

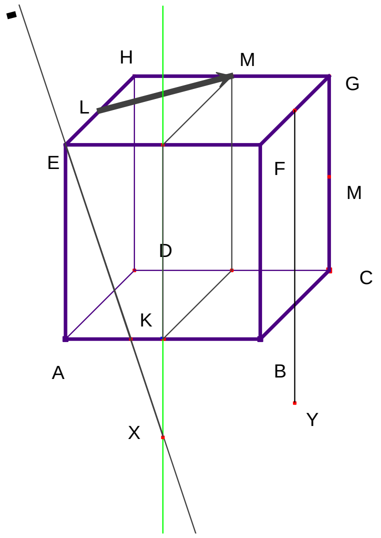


8.3.13



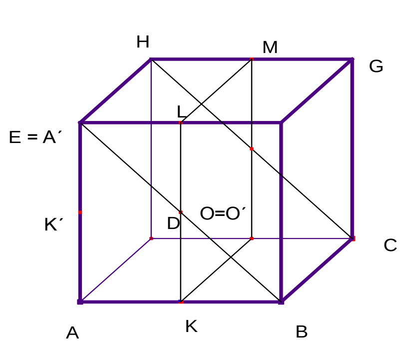
8.3.15 **8.3.16**





8.3.18$H(T, -\frac{1}{3})$, T je těžiště čtyřstěnu.

8.3.20 obr.



8.3.21 a) $Z = S(\rho_2) \circ S(\rho_1)$, ρ_1, ρ_2 jsou rovnoběžné s rovinou ABC a procházejí po řadě body M, N, které jsou vnitřními body hrany AE, $|AM| = |NE| = \frac{|AE|}{4}$. b) $Z = S(\rho_2) \circ S(\rho_1) = S(\rho_1) \circ S(\rho_2)$; ρ_1 je rovnoběžná s rovinou ADH a prochází středem hrany AB, , ρ_2 je rovnoběžná s rovinou ABE a prochází středem hrany BC. c) $Z = S(\rho_4) \circ S(\rho_3) \circ S(\rho_2) \circ S(\rho_1)$; ρ_1, ρ_2 jsou rovnoběžné s hranou AE , procházejí středem krychle , svírají spolu odchylku 45°, odchylka ρ_1 a ABE i odchylka ρ_2 a BDH je 22°30´, ρ_3, ρ_4 jsou rovnoběžné s rovinou ABC a procházejí po řadě body M, N, které jsou vnitřními body hrany AE, $|AM| = |NE| = \frac{|AE|}{4}$.

9. Kombinatorika a pravděpodobnost

9.1 Skupiny s opakováním

9.1.1 125. **9. 1. 2** $V'(k, r) = r^k$**. 9.1.3** Počet možných iniciál je $V'(2,32) = 1024$. **9.1.4** 36. **9.1.5** K´(3,3) – 1= 9. **9.1.7** K´(3,10) = 220, z toho je 10 krychlí. **9.1.8** a) K´(15,10) = $\binom{24}{15}$. b) K´(51,10) -10. c) K(8,10) = 45. **9.1.9** a) K´(3,4) - 3 = 17. b) K´(2,4) = $\binom{5}{2} = 10$. **9.1.10** a) K´(4,4) =$\binom{7}{3}$ =35. b) K´(4,8) =$\binom{11}{4}$. **9.1.11** K´(3,3) = 10. **9.1.12** K´(3,6) = 56. **9.1.13** a) K´(5,4) = 56. b) K´(5,4) – 2 = 54.

9.2 Kombinatorické úlohy

9.2.1 a) n!m!. b) 2.n!m!. c) (n + 1)!m!. **9.2.2** 2.5!.5! = 28800. **9.2.3** $\binom{4n}{3} - 4.\binom{n}{3}$. **9.2.4** $\binom{32}{12}.\binom{20}{12}$. **9.2.5** $\binom{n}{4}$. **9.2.6** $\binom{8}{2}.\binom{6}{2}.\binom{4}{2}$. **9.2.7** $\binom{n}{2} - \binom{p}{2} - \binom{q}{2} + 2$. **9.2.8** K´(3,4) = 20. **9.2.9** $\frac{24!}{4!}$. **9.2.10** a) K´(6,2) = 7. b) K´(2,2) = 3. **9.2.11** K´(8,3) = 45. **9.2.12** K´(4,3). K´(6,3) = 420. **9.2.13** $\frac{16!}{6!.6!.4!}$.

9.3 Podmíněná pravděpodobnost, celková pravděpodobnost

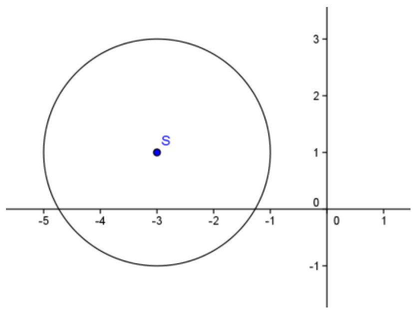
9.3.1 $P(A|B) = \frac{1}{2}$, $P(B|A) = \frac{1}{3}$. **9.3.2** $P(B_1) = \frac{b}{b+c}$, $P(B_2) = \frac{b}{b+c}$. **9.3.3** $P(K_2) = 0{,}6$. **9.3.4** $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{1}{3}$. **9.3.5** $P(V) = 0{,}0064$. **9.3.6** $P(B) = 0{,}6$. **9.3.7** $P(CH) = 0{,}028$. **9.3.8** $P(K) = 0{,}4$.

10. Komplexní čísla

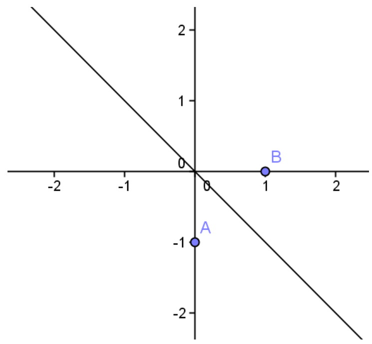
10.1Komplexní čísla jako body Gaussovy roviny

10.1.1 a) Polorovina s hraniční přímkou y = 0,5 obsahující bod $O[0; 0]$, kromě vnitřních bodů kruhů o středech $O_1[0; 0]$ a $O_2[1; 0]$ a poloměrech 1. b) Bod $[0; 2]$. c) Vnitřní body kruhu o středu $S[-1; 0]$ a poloměru 2, kromě bodu $[0; 0]$. d) Vnitřní body poloroviny s hraniční přímkou y = -x, obsahující např. bod $[-1; 0]$. e) Průsečíky kružnice o středu $S[1; 1]$ a poloměru 1 a přímky y = x. **10.1.2** a) k(S,r); $S[-3; 1]$, r = 2.. b) Osa úsečkyAB; $A[0; -1]$, $B[1; 0]$. c) Osa úsečkyAB; $A[-3; 1]$, $B[1; -2]$

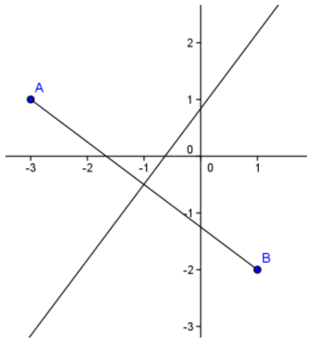
a)



b)



c)



10.2 Rovnice v oboru C

10.2.1 $z_1 = 6 + 17i$, $z_2 = 6 + 8i$. **10.2.2** a) Neexistuje. b) $z = \frac{3}{4}$ i. 1**0.2.3** a) $x_{k+1} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{7}{12}\pi + \frac{2}{3}k\pi\right) + i\sin\left(\frac{7}{12}\pi + \frac{2}{3}k\pi\right)\right)$, $k \in \{0, 1, 2\}$. b) $x_{k+1} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}k\pi\right)\right)$, $k \in \{0, 1, 2\}$. c) $x_{k+1} = \sqrt[5]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{15} + \frac{2}{5}k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{15} + \frac{2}{5}k\pi\right)\right)$, $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. d) $x_{k+1} = \sqrt[5]{2}\left(\cos\left(\frac{2}{15}\pi + \frac{2}{5}k\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{15}\pi + \frac{2}{5}k\pi\right)\right)$, $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. e) $x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{3}$, $x_{3,4} = \pm\sqrt[4]{3}i$, $x_{5,6} = \pm 1$, $x_{7,8} = \pm i$. f) $x_{k+1} = \left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}\right)\right)$, $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. g) $-0{,}1 \pm 0{,}3i$, $-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$. h) $\frac{1\pm 2i}{5}$, -1, $\frac{1}{3}$. i) 1, $-2 \pm i\sqrt{3}$. j) $1 \pm 3i$, -2, 4. **10.2.4** a) $\pm 2 + i$. b)1+ i, -1 – i, $-\sqrt{2} + \sqrt{2}i, \sqrt{2} - \sqrt{2}i$. c) $\pm i$, $1 \pm i$.

11. Analytická geometrie

11.1Vektory: lineární kombinace vektorů, vektorový a smíšený součin

11.1.1 a) ne, b) ano $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b}$. **11.1.2** ano, B – A, C – D jsou závislé vektory. **11.1.3** a) (-2,-2,4), b) (-1,-1,3), c) (0,-1,0). **11.1.4** 3,5 . **11.1.5** 5. **11.1.6** 10. **11.1.7** 3. **11.1.8** a) $S_1 = \frac{\sqrt{1667}}{2}$, $S_2 = \frac{\sqrt{2378}}{2}$, $S_3 = \frac{\sqrt{557}}{2}$, $S_4 = \frac{51\sqrt{2}}{2}$. b) $\frac{187}{6}$. c) (31, 25, 9), (4, -39, -29), (10,-4, 21), (1,4,1).

11.2 Vyšetřování množin bodů metodou souřadnic

11.2.1 Rovnici $\sqrt{\left(x+\sqrt{2}\right)^2+\left(y+\sqrt{2}\right)^2} = 2\sqrt{2} + \sqrt{\left(x-\sqrt{2}\right)^2+\left(y-\sqrt{2}\right)^2}$ dvakrát umocněte.
11.2.3 Zvolte přímku q v ose y, F[4,0]. Elipsa, střed S[8,0], jedno ohnisko elipsy v F, a = $4\sqrt{2}$, b = 4. **11.2.4** Hyperbola, hlavní osa v ose x, S$[-4{,}5;\,0]$, a = $\frac{3}{2}$, b = $3\sqrt{2}$; rovnice: $8(x+4{,}5)^2 - y^2 = 18$. **11.2.5** Elipsa, AB∥ x, S$[-1;3]$, a = 2, b = $\sqrt{3}$; rovnice: $3(x+1)^2+4(y-3)^2=12$. **11.2.6** Kružnice, S$[1;1]$, r = 1. **11.2.7** Sjednocení dvou oblouků parabol; pro x ≥ 0: y^2= -4(x – 5), pro x≤ 0: y^2= 20(x +1).

11.3 Kuželosečky (tečna kuželosečky)

11.3.1 d = -5 $\pm 5\sqrt{2}$, $T_1\left[1+2\sqrt{2},-3-\sqrt{2}\right]$, $T_2\left[1-2\sqrt{2},-3+\sqrt{2}\right]$. **11.3.2** t_1: x = 2, t_2: 4x+ 3y – 65 = 0. **11.3.3** $T_1[-5{,}6;-4{,}2]$, $T_2[-4{,}2;-5{,}6]$. **11.3.4** a) $(x-5)^2+(y-4)^2=16$. b) $x-2)^2+(y-2)^2=4$, $(x-10)^2+(y-10)^2=100$. **11.3.5** $\left[3\sqrt{5},3\sqrt{5}\right]$, $\left[-3\sqrt{5},-3\sqrt{5}\right]$, $\left[\sqrt{5},-\sqrt{5}\right]$, $\left[-\sqrt{5},\sqrt{5}\right]$. **11.3.6** a) p = 1. b) p = 16. **11.3.7** c = $\pm\sqrt{5}$. **11.3.8** q = $\pm 2\sqrt{10}$. **11.3.9** t_1: 8x – 9y + 30 = 0, t_2: y = -2. **11.3.10** Střed tětivy je $\left[-\frac{9c}{20},\frac{c}{10}\right]$. **11.3.11** Souřadnice M vyhovují rovnici hyperboly, $\frac{a}{\cos t} > 0$, dostáváme pouze body jedné větve hyperboly. **11.3.12** k = ±1… přímka je rovnoběžná s asymptotou – 1 spol. bod, k = $\pm\sqrt{2}$… tečna – 1 spol. bod, $|k| > \sqrt{2}$ ... vnější přímka – 0 spol. bod, $|k| < \sqrt{2}$, k≠±1 …sečna – 2 spol. body. **11.3.13** q = ±5 **…**1 spol. bod, $|q| < 5$ ...0 spol. bodů, $|q| > 5$ … 2 spol. body. **11.3.14** y = 2x ± $\sqrt{2}$. **11.3.15** y = x + 0,5. **11.3.16** p = 5. **11.3.17** y = x, y = -3x.

11.4 Koule, kulová plocha

11.4.1 $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 14$, [0,0,0], [2,0,0], $[0,-4,0]$, [0,0,6].
11.4.2 $x^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 14$, [1,4,0], $[-1,4,0]$, $[1,-2,0]$, $[1,4-4]$.
11.4.3 $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 169$, τ: 4x – 3y + 12z -149 = 0. **11.4.4** $r_1 = 5$, $r_2 = \sqrt{160}$, $r_3 = \sqrt{153}$. **11.4.5** $|S,\rho| = \frac{5\sqrt{6}}{3} < 5$ = r, O$\left[-\frac{10}{3},\frac{5}{3},-\frac{5}{3}\right]$. **11.4.6** d ϵ (- 149, 189). **11.4.7** [2,0,1], $\left[\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$. **11.4.8** $[0,-1,1]$, $[2,-3,0]$ **.**