INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ
TENTO PROJEKT JE SPOLUFINANCOVÁN EVROPSKÝM SOCIÁLNÍM FONDEM A STÁTNÍM ROZPOČTEM ČESKÉ REPUBLIKY.

„Práce s talenty - Vyhledávání talentů pro konkurenceschopnost a práce s nimi“
reg. č. CZ.1.07/1.2.08/02.0017

Eva Pomykalová, Ivana Machačíková, Josef Molnár, Jana Sušilová

Sbírka úloh

NADSTANDARDNÍ ÚLOHY z matematiky

V INKLUZÍVNÍM PROSTŘEDÍ GYMNÁZIA

(s komentářem pro učitele)

PARTNEŘI PROJEKTU

Předmluva

Sbírka vznikla na Gymnáziu Zlín – Lesní čtvrť v rámci projektu ESF CZ.1.07/1.2.08/02.0017 „Vyhledávání talentů pro konkurenceschopnost a práce s nimi“ řešeným ve spolupráci s Přírodovědeckou fakultou Univerzity Palackého v Olomouci. Je určena především žákům středních škol s talentem na matematiku, kteří mají o matematiku hlubší zájem a chtějí si procvičit učivo střední školy na složitějších příkladech, a jejich učitelům.
Ve sbírce jsou jak původní příklady, tak příklady vybrané z učebnic a sbírek uvedených v přehledu literatury. Příklady jsou uspořádány tematicky a seřazeny tak, že tvoří skupiny vázané společnou vlastností. Pořadí témat odpovídá jejich zařazení v učebních plánech většiny gymnázií. Symbolika a terminologie použitá ve sbírce je v souladu s Názvy a značkami školské matematiky. Sbírka je opatřena metodickými poznámkami. Nedílnou součástí sbírky je soubor s výsledky úloh.

Obsah sbírky

1.Teorie množin

1.1 Množiny, Vennovy diagramy

1.1.1 Množina $\{X \in E_2; |AX| \leq |BX|\}$ je polorovinou $\mapsto oA$, kde o je osa úsečky AB. Využijte toho k vyznačení těchto bodových množin v rovině, v nichž je narýsován čtverec $ABCD$: a) $\{X \in E_2; |AX| \leq |BX| \leq |CX|\}$

b) $\{X \in E_2; |AX| < |CX| \wedge |BX| = |BA|\}$

c) $\{X \in E_2; |AX| > |CX| \vee |BX| \leq |BD|\}$

1.1.2 Doplňte rovnostranný trojúhelník *ABD* na kosočtverec *ABCD* a vyznačte těžiště T_1, T_2 trojúhelníků *ABD, BDC*. Zakreslete množinu

$M = \{X \in E_2; |AX| \geq |BX| \wedge |BX| \leq |CX| \wedge |CX| \geq |DX| \wedge |DX| \leq |AX|\}$.

Zjistěte vzájemné vztahy bodových množin *M, K=kosočtverec ABCD, L=čtyřúhelník* T_1BT_2D.

1.1.3 Narýsujte v rovině E_2 čtverec *ABCD* a zakreslete tyto množiny bodů:

a) $\{X \in E_2; |AX| = |CX|\}$

b) $\{X \in E_2; |AX| = |AB|\}$

c) $\{X \in E_2; |CX| \leq |CA|\}$

d) $\{X \in E_2; |AB| < |AX| < |AC|\}$

1.1.4 Vyšrafujte ve Vennově diagramu pro 3 množiny A, B, C oblasti, které znázorňují množiny:

a) $(A \cap C') \cup (B \cap C')$

b) $(A \cup B \cup C)'$

c) $(B \cap C) - A$

d) $A - (B \cup C)$

1.1.5 Vyšrafujte ve Vennově diagramu pro 4 množiny A, B, C, D oblasti, které znázorňují množiny:

a) $(A \cap B) \cap (C \cap D)$

b) $A' \cap D'$

c) $(A \cup B \cup D)'$

d) $(A' \cup B') \cap (C' \cup D')$

1.1.6 Nakreslete Vennův diagram pro množiny *D, T, P* a zakreslete všechny jejich prvky, jestliže $D = \{x \in N; n^2 \leq 30\}$, $T = \{x \in N; 4|n \wedge n < 10\}$, $P = \{2,3,8,9\}$.

1.1.7 Nakreslete Vennovy diagramy pro obory pravdivosti výrokových forem $A(x): 8|x$, $B(x): 4|x$ v těchto případech:

a) $U = \{x \in N; x < 20\}$, b) $U = \{x \in N; x \leq 7\}$, c) $U = \{x \in N; x < 4\}$.

Zakreslete všechny prvky množiny *U,* prázdnost polí diagramu vyznačte znakem pro prázdnou množinu. Jaké jsou vztahy mezi dvojicemi množin *A, B*? Zapište příslušné kvantifikované výroky.

1.1.8 Určete všechny celočíselné kořeny rovnice $x^2 - 4x - 12 = 0$. Najděte

Doporučujeme zopakovat se žáky základní pojmy (případně jim doporučit jejich zopakování):

základní geometrické útvary v rovině,

klasifikace (třídění) trojúhelníků a čtyřúhelníků, těžiště,

množina, prvek množiny, průnik a sjednocení množin, Vennův diagram,

John Venn (4. srpna 1834, Hull - 4. dubna 1923, Cambridge) anglický matematik, logik a filosof

výrok, výroková forma, obor pravdivosti výrokové formy, obecný a existenční kvantifikátor,

pravidla dělitelnosti

souvislost této úlohy s množinami *A* a *B,* je-li $A=\{x\in Z; x^2-4x-12=0\}$, $B=\{x\in Z; x/12\}$. Zvolte základní množinu $U = B$ a zakreslete Vennův diagram pro množiny *A, B*. Zformulujte kvantifikovaný výrok obsahující implikaci z daných výrokových forem a zapište vztah mezi množinami *A, B*, který je jím vyjádřen.	v N, řešení rovnice v daném oboru, kvadratická rovnice,

1.2 Důkaz rovnosti množin pomocí Vennových diagramů

1.2.1 Ověřte pomocí Vennových diagramů, zda pro libovolné podmnožiny *A, B, C* dané základní množiny *U* platí:

a) $A \cap (B \cup C)' = (A \cap B') \cap (A \cap C')$

b) $(A \cup B) \cap C' = (A \cap C') \cup (B \cap C')$

c) $(A \cup B) \cap (A \cup C)' = A \cup (B \cap C')$

d) $(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C') = A \cap B$

e) $(A \cap B) \cup (C \cup A) = C \cup A$

1.2.2 Rozhodněte pomocí Vennových diagramů, zda pro libovolné podmnožiny *A, B, C, D* dané základní množiny *U* platí:

a) $[(A \cup B) \cap D'] \cup (C \cup D) = U$

b) $(A \cap B) \cup (C \cup D) = (D \cap B) \cup (C \cup A)$

c) $A \cap B \cap C \cap D' = (A \cap B \cap D') \cap (C \cup D)$

d) $(A \cap B \cap D') \cup (C \cap D \cap A') = C \cap B \cap A'$

1.2.3 Užitím Vennových diagramů zjednodušte zápisy:

a) $[(A \cup B)' \cup (B \cup C)] \cap (C \cup A)$

b) $[C \cap (A \cap C)'] \cup [A \cup [B \cap (A \cap B)']]$

c) $[A \cap (B \cup C)]' \cap (A \cap D)' \cap (D' \cap C)$

1.2.4 Otec šel koupit s malým Jirkou autíčko. Jirka vyslovil přání: „Chci autíčko s houkačkou. Přitom ještě chci, aby mělo setrvačník a vyklápěčku nebo to musí být plechové autíčko s houkačkou. Nechci ale vůbec plechové autíčko bez vyklápěčky.“ Prodavačka řekla: „Tak ty chceš autíčko, které musí mít vyklápěčku, setrvačník a houkačku. Takové nemáme.“ Otec nakonec koupil Jirkovi plechové autíčko bez setrvačníku, s vyklápěčkou a houkačkou. Odhadla prodavačka správně Jirkovo přání? Koupil otec takové auto, jaké si Jirka přál?

úlohy typu Zebra *)

Lze využít jako skupinovou práci v homogenních či heterogenních skupinách žáků.

*) Další náměty na úlohy typu Zebra naleznete např. na
http://zavitnicek.sweb.cz/cla_zebry.htm nebo
http://class.pedf.cuni.cz/NewSUMA/Download/Volne/SUMA_47.pdf

1.3 Zákony pro operace s množinami **1.3.1** Užitím Vennových diagramů ověřte platnost vět množinové algebry - vlastnosti průniku a sjednocení množin, distributivnost sjednocení vzhledem k průniku, distributivnost průniku vzhledem ke sjednocení, de Morganovy formule. **1.3.2** Určete, která z výše uvedených vět množinové algebry má své „ekvivalenty“ v algebře. **1.3.3** Užitím vět množinové algebry zjednodušte množinové zápisy: a) $M \cup (N \cap M')$ b) $(M \cup N') \cap (N \cup M)$ c) $(B \cup C) \cap (B' \cap C')$ d) $(A' \cap K')' \cap (K' \cup A')'$ Výsledky ověřte užitím Vennových diagramů.	doplněk množiny, distributivnost, de Morganovy formule, **Augustus De Morgan** (27. června 1806, Madurai, Indie - 6. listopadu 1871, Londýn) - britský matematik tautologie, kontradikce,

1.4 Množina R a její podmnožiny	
1.4.1 Sestrojte úsečku délky $\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{11},\sqrt{12},...$	číselná osa, odmocniny, geometrické konstrukce algebraických výrazů,
1.4.2 Daný interval přepište užitím nerovnosti popř. absolutní hodnoty: $(-20;15)$, $\left\langle \frac{14}{3};\frac{32}{5}\right\rangle$, $\langle -12;7)$, $(-12;7\rangle$	
1.4.3 Zápisy $\lvert x-a\rvert<\varepsilon$ ***a*** $\lvert x-a\rvert\le\varepsilon$ přepište intervalem.	absolutní hodnota, geometrický význam absolutní hodnoty,
1.4.4 Zapište bez absolutní hodnoty: $\lvert 1-\sqrt{5}\rvert$, $\lvert 2-\sqrt{7}\rvert$, $\lvert\sqrt{3}-5\rvert$, $\lvert 1-x\rvert$, $\lvert x-3\rvert$, $\lvert 2x-5\rvert$, $\lvert 2-9x\rvert$, ...	uzavřený a otevřený interval,
1.4.5 S využitím geometrického významu absolutní hodnoty řešte rovnice: $\lvert x-3\rvert=5$, $\lvert 2x+3\rvert=5$, $\lvert 1-3x\rvert=2$, ...	
1.4.6 S využitím geometrického významu absolutní hodnoty řešte nerovnice: $\lvert x-3\rvert\le 2$, $\lvert x+3\rvert\ge 4$, $\lvert 2x-5\rvert<4$, ...	
1.4.7 Odstraňte odmocninu ze jmenovatele: $\frac{2}{\sqrt[3]{5}}=...$, $\frac{2}{\sqrt[3]{5}+1}=...$, $\frac{2}{\sqrt[3]{3}-2}=...$, $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}=...$, $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+1}=...$, $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=...$	pravidla pro počítání s odmocninami,
1.4.8 Vyznačte na číselné ose množiny $\{x\in R; x^2<1\}$, $\{x\in R;\sqrt{x}\le 3\}$, $\{x\in R;(x>1)\wedge(x\le 3)\}$, $\{x\in R;(x<2)\vee(x>8)\}$.	

1.5 Kartézský součin, binární relace, zobrazení **1.5.1** Sestrojte grafy kartézského součinu v množině a) *Z*, b) *R*. a) $\langle -2,1\rangle \times \langle 3,5\rangle$, b) $(-2,1)\times(3,5)$, c) $\langle -2,5\rangle \times R$, d) $(-\infty,5\rangle \times (-\infty,3\rangle$, e) $\{3\}\times(-\infty,\infty)$.	kartézský součin množin, **René Descartes**, *lat. Renatus Cartesius* (31. března 1596, La Haye – 11. února 1650, Stockholm) - francouzský filosof, matematik a fyzik
1.5.2 Ve zvolené kartézské soustavě souřadnic zobrazte množinu všech bodů, pro jejichž souřadnice x, y platí: a) $\lvert x\rvert \le 1 \wedge \lvert y\rvert \ge 1$ b) $\lvert x\rvert \ge 1 \vee \lvert y\rvert \le 1$ c) $xy = 0 \wedge y = x^2 - 1$	binární relace, zobrazení,
1.5.3 Určete výčtem prvků relace, které jsou dány v množině $M = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ výrokovými formami: a) $x.y = 8$ b) $x - y = 2$ c) y je dělitelné x d) čísla x, y jsou nesoudělná Sestrojte kartézské grafy těchto relací.	vlastnosti binární relace,
1.5.4 Která relace z předchozí úlohy je zobrazení? **1.5.5** Určete inverzní relace a inverzní zobrazení k relacím a zobrazením z příkladů 1.5.3 a 1.5.4.	zobrazení z množiny do množiny, množiny do množiny, z množiny na množinu, množiny na množinu; prosté zobrazení; vzájemně jednoznačné zobrazení,

2. Výroková logika

2.1 Složené výroky	
2.1 Složené výroky **2.1.1** Danou implikaci obraťte, obměňte, negujte: a) Jestliže bude zítra pršet, nepřijdu. b) Je-li dané celé číslo dělitelné dvěma a sedmi, pak je dělitelné i čtrnácti. c) Je-li dané celé číslo dělitelné dvaceti čtyřmi, pak je dělitelné třemi a osmi. **2.1.2** Negujte výroky: a) Bude-li zítra pršet, půjdu do kina nebo do divadla. b) Nebude-li zítra pršet, pojedu na výlet. c) Eva přijede právě když nepřijede Adam ani Petr. d) Jím ryby a drůbež, ale nejím vepřové maso. e) Léky užívám tehdy a jen tehdy, když jsem nemocný. f) Nepřijde-li Petr ani Pavel, půjdu do kina sám. g) Jestliže nestihnu vlak, přijedu autobusem nebo autem.	pravdivostní hodnota výroku, hypotéza, konjunkce, disjunkce, implikace, ekvivalence, negace, množinový význam matematických vět, **Aristoteles** (384 - 322 př. n. l.) - antický filosof

2.2 Výroky s kvantifikátory **2.2.1** Zapište symbolicky a určete pravdivostní hodnotu výroku: a) Absolutní hodnota každého reálného čísla x je kladná. b) Pro každé celé číslo z platí, že je-li dělitelné dvěma a třemi, pak je dělitelné šesti. c) Součet každých čtyř po sobě jdoucích přirozených čísel je sudý. d) Součin každých tří po sobě jdoucích přirozených čísel je dělitelný šesti. e) Existuje alespoň jedno celé číslo, jehož třetí mocnina je kladná. f) Převrácená hodnota některých reálných čísel je menší než deset. **2.2.2** Negujte: a) Přímka má s kružnicí právě jeden společný bod. b) Dnešní úlohu neodevzdali 2 žáci. c) Nikdo dnes nechybí. d) Všichni studenti z naší třídy přišli včas. e) Bez práce nejsou koláče. f) Žádný učený z nebe nespadl. **2.2.3** Vyslovte negaci výroků: a) Daný trojúhelník je pravoúhlý a aspoň jeden úhel má menší než 30°. b) Daná rovnice má aspoň jeden záporný nebo kladný kořen. c) Má-li daná rovnice aspoň jeden dvojnásobný kořen, má aspoň jeden další kořen. d) Není-li daný trojúhelník rovnoramenný, nebude mít konstrukce více než dva různé výsledky. e) Tři sestrojené body splynou právě tehdy, když daný trojúhelník je rovnostranný. **2.2.4** Určete pravdivostní hodnotu výroků: a) $\exists n \in N \;\; \forall x \in R : x^n = 1$, b) $\forall n \in N \;\; \exists x \in R : x^n \neq 1$, c) $\exists n \in N \;\; \exists x \in R^+ : x^n = 0$, d) $\forall n \in N \;\; \forall x \in R^+ : x^n \neq 0$.	absolutní hodnota, dělitelnost v Z, obecný a existenční kvantifikátor, příklady jejich užití, negace kvantifikovaných výroků, „Kterých trojúhelníků je více - ostroúhlých nebo tupoúhlých?“

2.3 Výrokové formy **2.3.1** Určete definiční obory a obory pravdivosti výrokových forem: a) $V(x): \dfrac{(x^2+x+1).(x^2-2)}{(x+1).(x^2-x+1)} \geq 0$ b) $V(x): \dfrac{x^4+3x^3-3x-x^2}{2x^2+3x-2} \leq 0$ c) $V(x): \dfrac{(x^2+3).(x^4-16).(x^2+5x)}{(x^3-8).1(x^3+125)} > 0$ d) $V(x): \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2}} < 0$ e) $V(x): \dfrac{2x}{x^2-3x+2} \geq 1$ je-li oborem výrokové formy množina: 1) R 2) Z 3) N.	definiční obor výrokové formy, rovnice a nerovnice v součinovém a podílovém tvaru,

2.4 Úsudky

2.4.1 Rozhodněte, zda zapsané úsudky jsou správné

$$\text{a)}\ \begin{array}{l} x \Rightarrow y \text{ platí} \\ \underline{y \Rightarrow z \text{ platí}} \\ x \Rightarrow z \text{ platí} \end{array} \qquad \text{b)}\ \begin{array}{l} x \Rightarrow y \quad \text{platí} \\ \underline{\neg z \Rightarrow \neg y \text{ platí}} \\ z \Rightarrow \neg x \quad \text{platí} \end{array} \qquad \text{c)}\ \begin{array}{l} x \vee y \quad \text{platí} \\ \underline{y \wedge z \quad \text{neplatí}} \\ x \Rightarrow \neg z \ \text{ platí} \end{array}$$

2.4.2 Na třídní schůzky může jít nejvýše jeden z rodičů. Rozhodněte, zda jsou správné úsudky a) nepůjde-li otec, půjde matka, b) nepůjde-li otec, nepůjde matka.

2.4.3 Na službě se střídají tři žáci, Adam, Bert a Cyril. Jestliže na službě není Adam nebo tam není Cyril, musí tam být Bert. Jestliže jsou na službě Adam i Bert, není tam Cyril. Rozhodněte, zda za těchto podmínek jsou správné úsudky:
a) Není-li na službě Adam, je tam Bert.
b) Není-li na službě Adam, je tam Cyril.
c) Není-li na službě Bert, je tam Cyril.

2.4.4 Tři dcery, Anička, Bětka a Cilka se podílejí na úklidu domácnosti podle těchto formulí: $(\neg A \wedge B) \Rightarrow \neg C$, $(A \vee \neg B) \Rightarrow C$, $(C \Rightarrow A) \Rightarrow B$. Rozhodněte, zda jsou za těchto předpokladů správné otcovy úsudky:
a) Jestliže neuklízí Anička, pak neuklízí ani Bětka.
b) Jestliže neuklízí Anička ani Bětka, neuklízí ani Cilka.

2.4.5 Studuji-li logiku, bolí mne hlava. Vezmu-li si prášek proti bolení hlavy, zhloupnu. Prášek si beru právě tehdy, když mne bolí hlava. Z toho plyne, že když studuji logiku, zhloupnu: Je tento úsudek správný?

„Výrok je pravdivý nebo nepravdivý, úsudek správný nebo nesprávný“.

úsudky typu:
- modus ponens,
- modus tolens,
- pravidlo kontrapozice,
- pravidlo sylogismu,

aplikace,

2.5 Důkazy matematických vět	
2.5.1 Dokažte, že pro každé $a \in N$ platí: a) $5 \cdot 3^{a+2} - 3 \cdot 3^{a+1} = 36 \cdot 3^{a}$, b) $3 \cdot 2^{a+3} - 2 \cdot 2^{a+2} + 2^{a+4} = 2^{a+5}$	přímý důkaz rovnosti,
2.5.2 Dokažte (bez numerických výpočtů), že platí: $\sqrt{6+2\sqrt{5}} = 1+\sqrt{5}$.	důkaz sporem,
2.5.3 Dokažte, že pro $a \in N, b \in N, a^2 \geq b$ platí: $\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+r}{2}} + \sqrt{\frac{a-r}{2}}$, kde $r = \sqrt{a^2-b}$	surdický výraz; důkaz sporem,
2.5.4 Dokažte (bez numerických výpočtů), že platí: $3+\sqrt{2} > \sqrt{19}$.	důkaz sporem,
2.5.5 Dokažte (bez numerických výpočtů), že platí $\sqrt{10-\sqrt{11}} < \sqrt{10+\sqrt{11}} - 1$	
2.5.6 Dokažte větu a) $\forall n \in N; 2 \mid n \Leftrightarrow 2 \mid n^2$ b) $\forall n \in N; 3 \mid n \Leftrightarrow 3 \mid n^2$	ekvivalence; nepřímý důkaz implikace,
2.5.7 Dokažte, že $\sqrt{2}$ a $\sqrt{3}$ jsou iracionální čísla	důkaz sporem,

3. Teorie čísel

3.1 Důkazy vět o dělitelnosti	
3.1.1 Dokažte, že a) součet dvou dvojciferných přirozených čísel, která se liší jen pořadím cifer, je dělitelný 11, b) rozdíl dvou dvojciferných přirozených čísel, která se liší jen pořadím cifer, je dělitelný 9, c) rozdíl trojciferného přirozeného čísla a čísla, které z něho vznikne záměnou krajních cifer, je dělitelný 99.	násobek, dělitel, rozvinutý zápis čísla,
3.1.2 Tři mocniny čísla 2, jejichž exponenty jsou tři po sobě jdoucí přirozená čísla, mají součet dělitelný sedmi. Dokažte. **3.1.3** Dokažte, že součin pěti libovolných za sebou následujících přirozených čísel je dělitelný dvěma, třemi, čtyřmi, pěti, deseti, patnácti, třiceti, šedesáti i stodvaceti.	násobek, dělitel, úpravy mocnin, dělitelnost součinu,
3.1.4 Dokažte kritérium dělitelnosti a) čtyřmi, b) osmi, c) třemi, d) devíti. **3.1.5** Zdůvodněte, proč každé přirozené číslo lze zapsat právě jedním z výrazů $5k, 5k+1, 5k+2, 5k+3, 5k+4,\ k \in N_0$. **3.1.6** Dokažte, že součet každých tří (pěti, sedmi) po sobě jdoucích přirozených čísel je dělitelný třemi (pěti, sedmi).	kritéria dělitelnosti, zbytkové třídy,
3.1.7 Dokažte, že pro každé $n \in N$ je a) číslo 3 dělitelem čísla $n^3 + 2n$, b) číslo 6 dělitelem čísla $n^3 + 11n$, c) číslo 4 dělitelem čísla $n^4 + 3n^2$.	metoda zbytkových tříd,
3.1.8 Dokažte, že pro každé $n \in N$ je a) číslo 6 dělitelem čísla $n^3 - n$, b) číslo 12 dělitelem čísla $n^4 - n^2$, c) číslo 30 dělitelem čísla $5n^3 + 15n^2 + 10n$.	metoda rozkladu,
3.1.9 Dokažte, že pro každé $n \in N$ je a) číslo 24 dělitelem čísla $n^5 - n^3$, b) číslo 30 dělitelem čísla $n^5 - n$.	kombinace obou metod,
3.1.10 Zapište symbolicky a dokažte větu: a) Jestliže je číslo 5 dělitelem *n*, pak není dělitelem $n^2 + 1$. b) Jestliže je číslo 3 dělitelem $n^2 + 2$, pak není dělitelem *n*, c) Jestliže není číslo 3 dělitelem $n^4 + 2$, pak je dělitelem čísla *n*.	přímý důkaz implikace, nepřímý důkaz implikace,
3.1.11 Dokažte, že pro libovolná přirozená čísla a, *b* platí $D(a,b) \cdot n(a,b) = a \cdot b$, kde $D(a,b)$ je největší společný dělitel a $n(a,b)$ nejmenší společný násobek čísel *a*, *b*.	prvočíselný rozklad,

3.2 z-adické číselné soustavy **3.2.1** Převeďte zápisy čísel 36 a 25 z desítkové soustavy do soustavy dvojkové (trojkové, čtyřkové, osmičkové, dvojkově kódované desítkové) a využijte tyto zápisy k sečtení, odečtení a vynásobení obou čísel. Výsledky ověřte převedením do desítkové soustavy. **3.2.2** Určete základ soustavy, víte-li, že a) $521_{(z)} = 424_{(z)} + 64_{(z)}$, b) $72_{(z)} \cdot 11_{(z)} = 802_{(z)}$. **3.2.3** Určete základy *z*, *u* číselných soustav, platí-li současně a) $35_{(z)} = 45_{(u)}$ a $23_{(z)} = 31_{(u)}$, b) $35_{(z)} = 45_{(u)}$ a $31_{(z)} = 41_{(u)}$. **3.2.4** Nahraďte písmena číslicemi (v pětkové soustavě), přitom dvě různá písmena označují dvě různé číslice $\begin{array}{r} HC \\ \cdot\ \underline{\ \ BC} \\ HC \\ \underline{CEB\ \ } \\ CBCC \end{array}$ **3.2.5** Kolik přirozených čísel má jednociferný, dvojciferný, trojciferný a *n*-ciferný zápis v soustavě o základu 5? **3.2.6** Kolikrát se v zápisech přirozených čísel v pětkové soustavě od čísla $1_{(5)}$ do čísla $444_{(5)}$ objeví jednotlivé číslice? Kolik číslic je zápisu těchto čísle potřeba celkem?	algebrogramy, kombinatorika,

Obměňujte – jiná čísla, dílčí úkoly, využijte např. částečně poziční desítkovou soustavu starých Číňanů a mayskou soustavu dvacítkovou.

4. Výrazy

4.1 Vzorce

4.1.1 Zjednodušte zápisy:

pravidla pro počítání s mocninami a odmocninami,

a) $\dfrac{a^{2x+1}.b^{4x-5y}}{a^{5-y}.b}:\left(\dfrac{a.b^{2x+1}}{a^{2y}.b^{x+2}}:\dfrac{a^{3x-2}.b^{4y}}{a^{2y-1}.b}\right)^{-2}=$ $\qquad x\in N, y\in N$

b) $\dfrac{(x+y)^{a-2}.(u-v)^{2a+1}}{(u-v)^{2a+3}.(x^2-y^2)^{2a+1}}:\dfrac{(u^2-v^2)}{(x-y)^{a+2}}=$ $\qquad a\in N$

c) $\left[\dfrac{a^2-b^2}{(x-y)^n}\right]^m.\dfrac{\left[(x^2-y^2)^m\right]^n}{(a+b)^m}.\left[\dfrac{a-b}{(x+y)^n}\right]^m=$ $\qquad m\in N, n\in N$

4.1.2 Zjednodušte zápisy:

a) $\dfrac{\sqrt[5]{x.\sqrt{x^3}}}{\sqrt[4]{x^3.\sqrt[5]{x^2.}}}.\dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{x^6}}}{\sqrt[3]{x^2.\sqrt[4]{x^3}}}=$

b) $\left[x.\sqrt{x.\sqrt[3]{x}}:\left(\sqrt[6]{x}.\sqrt{x^5}\right)\right]x^2.\sqrt{\sqrt[3]{x}}.\sqrt[6]{x}.\sqrt{x^5}=$

c) $\dfrac{\left(10^{\frac{1}{3}}.8^{-\frac{1}{2}}\right)^{-3}}{\left(5^{\frac{1}{4}}.4^{\frac{1}{8}}\right)^{2}}:\dfrac{\sqrt{2\sqrt[3]{4}}}{\sqrt[3]{2\sqrt[4]{4}}}=$

4.1.3 Upravte užitím vzorců:

a) $\left(a^x-2a^{2x}\right)^2=$

b) $\left[\left(a^x\right)^2.a^{x^{-2}}+a^{3x}:a^x\right]^2=$

c) $\left[\left(a^x\right)^2.a^{x^{-2}}-a^{3x}:a^x\right]^3=$

d) $\left(a^{x^{-1}}+a^x\right)^{-3}=$

4.1.4 Odvoďte vzorce**:**

násobení a dělení mnohočlenů,

a) $(a+b)^4=$ $\qquad (a-b)^5=$ $\qquad (a-b)^6=$

b) $a^3\pm b^3=$ $\qquad a^5\pm b^5=$

4.2 Rozklady mnohočlenů

4.2.1 Rozložte na součin

a) $(x-5).(2-x)-25+x^2-(5-x)^2=$

b) $3.(2x-1)-(1-2x)^2-(1-2x).(3+5x)=$

c) $y^4-2y^3+2y^2-2y+1=$

d) $y^3-3y^2+4=$

e) $a^3+3a^2+4a+2=$

f) $2b^4+b^3+4b^2+b+2=$

4.2.2 Rozložte na součin

a) $a^6-b^6=$

b) $a^7+1=$

c) $256-a^8=$

4.2.3 Rozložte na součin

a) $ax^2-bx^2+bx-ax+a-b=$

b) $a^5-a^3+a^2-1=$

c) $bc.(b+c)+ca.(c-a)-ab.(a+b)=$

d) $(a-b).(p-a).(p-b)+bp.(p-b)-ap.(p-a)=$

e) $x.(y^2-z^2)+y.(z^2-x^2)+z.(x^2-y^2)=$

4.2.4 Rozložte na součin

a) $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=$

b) $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=$

c) $a^3.(b-c)^3+b^3.(c-a)^3+c^3.(a-b)^3=$

4.2.5 Rozložte na součin

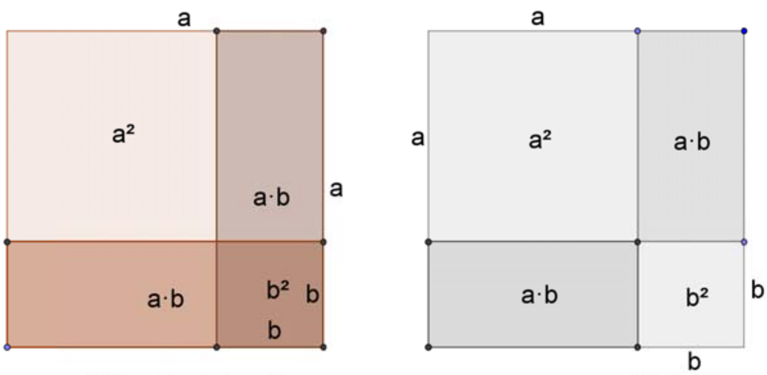
a) $\left[\left(a^2+b^2\right).\left(p^2+q^2\right)+4abpq\right]^2-4.\left[pq.\left(a^2+b^2\right)+ab.\left(p^2+q^2\right)\right]^2=$

b) $(x^2+y^2)^3+(z^2-x^2)^3-(y^2+z^2)^3=$

4.2.6 Dokažte, že pro všechna čísla a,b,c platí:

$bc.(c-b)+ac.(a-c)+ab.(b-a)=(a-b).(b-c).(c-a)$

geometrická interpretace vzorců $(a\pm b)^2$



(a - b)² = a² - 2ab + b²

(a + b)² = a² + 2ab + b²

4.3 Úpravy lomených výrazů

Upravte a určete podmínky:

význam podmínek, existence výrazů, definiční obor výrazu,

4.3.1 $$\frac{a^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+b^2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+c^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}{\frac{a}{bc}(c-b)+\frac{b}{ca}(a-c)+\frac{c}{ab}(b-a)}=$$

4.3.2 $$\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}\right).\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}=$$

4.3.3 $$\left(\frac{2a+10}{3a-1}+\frac{130-a}{1-3a}+\frac{30}{a}-3\right).\frac{3a^4-8a^3-3a^2}{a-a^3}=$$

4.3.4 $$\left(\frac{x+5}{x^2-81}+\frac{x+7}{x^2-18x+81}\right):\left(\frac{x+3}{x-9}\right)^2-\frac{1+x}{9+x}=$$

4.3.5 $$\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}.\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right):\frac{a-b-c}{abc}=$$

4.3.6 $$\frac{2b+a-\frac{4a^2-b^2}{a}}{b^3+2ab^2-3a^2b}.\frac{a^3b+2a^2b^2+ab^3-4a^2b^2}{a^2-b^2}=$$

4.3.7 $$\left(\frac{1}{3x-y}+\frac{3xy-4}{27x^3-y^3}\right):\left(\frac{1}{9x^2+3xy+y^2}+\frac{2-2y}{y^3-27x^3}\right)=$$

4.3.8 $$\frac{a-c}{a^2+ac+c^2}.\frac{a^3-c^3}{a^2b-bc^2}.\left(1+\frac{c}{a-c}-\frac{1+c}{c}\right):\frac{c.(1+c)-a}{bc}=$$

4.4 Úpravy výrazů s odmocninami

Upravte a určete podmínky:

4.4.1 $\sqrt[6]{8x\left(7+4\sqrt{3}\right)}.\sqrt[3]{2\sqrt{6x}-4\sqrt{2x}} =$

4.4.2 $\dfrac{4(2ab)^{\frac{3}{4}}.(a+2b)^{-1}}{\sqrt{a}-\sqrt{2b}} : \dfrac{\sqrt{2b\sqrt{2ab}}+\sqrt[4]{2a^3b}}{\sqrt{2ab}} =$

4.4.3 $\dfrac{\sqrt{\sqrt{2}-1}.\sqrt[4]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{(x+12).\sqrt{x}-6x-8}}{\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\sqrt{\sqrt{2}+1}.\sqrt[4]{3-2\sqrt{2}}} =$

4.4.4 $\dfrac{b^{\frac{1}{2}}}{1+a^{\frac{1}{2}}} : \left(\dfrac{\sqrt{b}-\dfrac{a}{(ab)^{-0,5}}}{1-a}-\sqrt{ab}\right)+\dfrac{a}{b}.\left(-3\dfrac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} =$

4.4.5 $1+\dfrac{(4-a^2)^{\frac{-1}{2}}-(2-a)^{\frac{-1}{2}}}{(2+a)^{\frac{-1}{2}}+(4-a^2)^{\frac{-1}{2}}}.\dfrac{1-a}{1-\sqrt{2-a}} =$

4.4.6 $\dfrac{a^{-1}+b^{-1}+2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^{-1}.\left(a^{\frac{-1}{2}}+b^{\frac{-1}{2}}\right)}{\left(\dfrac{ab-a\sqrt{ab}}{a+\sqrt{ab}}\right)^{-1}} =$

4.4.7 $\left[\dfrac{\sqrt{a}.\left(\sqrt{a}-1\right)+1-a}{\left(1-\sqrt{a}\right).\sqrt[4]{a^3}}\right]^{-2} : \dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt{9-a^2}} =$

4.4.8 $\left(\sqrt{y}+\dfrac{x-\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right):\left[\dfrac{y}{\sqrt{xy}+x}+x(xy)^{\frac{-1}{2}}-(x+y).(xy)^{\frac{-1}{2}}\right] =$

4.4.9 $\dfrac{\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}-1}{\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}}+\left(x^{-3}+x^{-2}-x^{-1}+1\right).\left(1-\sqrt{\dfrac{1}{x^2}}\right)^{-1} =$

4.4.10 $\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{a}}\right)^{\frac{1}{4}}:\left(\dfrac{2a^{-1}}{\sqrt[4]{2a^4}}\right)^{\frac{1}{2}}.\left[\dfrac{3\sqrt[4]{a^{2,5}}\,(6a)^{\frac{-1}{2}}}{\sqrt[6]{27}}\right]^{-1} =$

4.4.11 $\dfrac{(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}.(a-b)^{\frac{2}{3}}}{\left[(a-b)^4.(a+b)^5\right]^{\frac{1}{6}}}:\left[\dfrac{a^2-b^2}{(a-b)^{-1}.(a+b)^2}\right]^{\frac{1}{3}} =$

4.4.12 $\dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^3+\dfrac{2x^2\sqrt{x}}{x}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}+\dfrac{3\sqrt{xy}-3y}{x-y} =$

„Je pravda, že odmocnina z druhé mocniny daného čísla je rovna druhé mocnině odmocniny z téhož čísla?“

5. Rovnice, nerovnice a jejich soustavy

5.1 Rovnice a nerovnice s odmocninami	
5.1.1 $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+2x+1}=2$	úpravy rovnic - důsledkové, - ekvivalentní, - nepřípustné,
5.1.2 $\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2-4x+4}=3$	
5.1.3 $\sqrt{x+2}-\sqrt{2x-3}=\sqrt{4x-7}$	
5.1.4 $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$	
5.1.5 $\sqrt{y-2+\sqrt{2y-5}}+\sqrt{y+2+3\sqrt{2y-5}}=7\sqrt{2}$	
5.1.6 $3x^2+15x+2\sqrt{x^2+5x+1}=2$	
5.1.7 $\sqrt[3]{3x+28}-\sqrt[3]{3x-28}=2$	
5.1.8 $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}-6=0$	
5.1.9 $\sqrt{1+x\sqrt{2x^2+8}}=x+1$	
5.1.10 $\dfrac{4}{x+\sqrt{x^2+x}}-\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+x}}=\dfrac{3}{x}$	
5.1.11 $\sqrt{x-3}+6=5\sqrt[4]{x-3}$	
5.1.12 $\dfrac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=12$	
5.1.13 $\sqrt{4x^2-14x+1}=2x-5$	
5.1.14 $\sqrt{25x^2-28x-8}=5x-4$	
5.1.15 a) $\sqrt{x^2+2x-3}<1$	
b) $\sqrt{2x^2-3x-5}<x-1$	
c) $\sqrt{x^2-3x-10}<8-x$	
5.1.16 a) $\sqrt{1-x^2}+1<\sqrt{3-x^2}$	
b) $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}>\sqrt{2x-1}$	
5.1.17 $\dfrac{\lvert x+2\rvert-\lvert x\rvert}{\sqrt{4-x^3}}\geq 0$	
5.1.18 $\sqrt{4-x^2}+\dfrac{\lvert x\rvert}{x}\geq 0$	

5.2 Rovnice s parametrem (x je neznámá, ostatní písmena označují parametry) **5.2.1** $x.(a-4)=a^2-16$ **5.2.2** $a^2x-x+a=1$ **5.2.3** $x.(a-1)+a.(x+4)=2$ **5.2.4** $xa^2=a.(1+3x)-3$ **5.2.5** $2p.(xp+1)-(p^2+1).x=2$ **5.2.6** Pro jaké hodnoty parametru a $\in$ R má daná rovnice reálné kořeny? $(2a-1)x^2+(4a+1)x+1+2a=0$ **5.2.7** Pro jaké hodnoty parametru a $\in$ R má daná rovnice jeden kořen roven nule? $5x^2+(4a-15)x+a^2+6a-7=0$ **5.2.8** Určete m $\in$ R tak, aby průsečík přímek p, q ležel v daném kvadrantu: a) $p: 2x+3y=m$, $q: 2x-y=1$, III. kvadrant b) $p: 2x-y=m$, $q: x+y=1$, IV. kvadrant **5.2.9** $\frac{m}{x}+\frac{m+3}{2}=8+\frac{1}{x}$ **5.2.10** $\frac{kx+1}{x-2}=\frac{kx-1}{x+2}$ **5.2.11** $1+\frac{a^2-1}{x}=a$ **5.2.12** $px-\frac{2}{p^2}=\frac{1}{p}(4x+1)$	diskriminant kvadratické rovnice, kvadratické nerovnice, soustavy nerovnic,

5.3 Rovnice vyšších stupňů (řešení v R)	
5.3.1 a) $3x^4+6x^2=0$ c) $192x^{12}-3x^6=0$ b) $64x^6-8x^3=0$ d) $x^4-3x^2-4=0$	rozklad na součin činitelů,
5.3.2 a) $2x^3-3x^2-3x+2=0$ b) $3x^3+4x^2+4x+3=0$	
5.3.3 a) $12x^4-25x^3+25x-12=0$ b) $x^4+6x^3-6x-1=0$	
5.3.4 a) $2x^5-x^4-4x^3-4x^2-x+2=0$ b) $6x^5+x^4-43x^3-43x^2+x+6=0$	
5.3.5 a) $(2x-5)^4=81$ b) $(3x+2)^4=256$ c) $\left(x^4+1\right)^2+2.\left(x^4+1\right)=8$ d) $\left(x^4+1\right)^2-2.\left(x^4+1\right)=8$	užití substituce,
5.3.6 a) $x^6-19x^3-216=0$ b) $x^8-x^4-20=0$	
5.3.7 Doplněním na třetí mocninu dvojčlenu řešte: a) $x^3+6x^2=-12x+117$ b) $x^3-3x^2+3x=28$	vzorce $(a\pm b)^3$,
5.3.8 Doplněním na čtvrtou mocninu dvojčlenu řešte: a) $x^4-4x^3+6x^2-4x=15$ b) $x^4-4x^3+6x^2-4x=80$	vzorce $(a\pm b)^4$,

5.4 Soustavy rovnic

5.4.1
$$(2x+y).(x-2y)=48$$
$$(x+2y).(2x-y)=132$$

5.4.2
$$\frac{2x-5}{x-4}-\frac{y+1}{y-2}=1$$
$$\frac{3x+1}{x-1}-\frac{2y+9}{y+2}=1$$

5.4.3
$$\frac{1}{1-x+y}+\frac{1}{1-x-y}=\frac{2}{3}$$
$$\frac{1}{1-x-y}-\frac{1}{1-x+y}=-\frac{4}{3}$$

5.4.4
$$x^2+y^2+x+y=530$$
$$xy+x+y=230$$

5.4.5
$$x-y=\frac{7}{2}\left(\sqrt[3]{x^2y}-\sqrt[3]{xy^2}\right)$$
$$\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=3$$

5.4.6
$$5\sqrt{x+y}-\frac{18}{\sqrt{x+y}}=27$$
$$\sqrt{x^2-y^2}-5\sqrt{x-y}=4$$

5.4.7
$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy}=8\sqrt{2}$$
$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=4$$

5.4.8
$$\frac{6}{x+y}+\frac{5}{y+3z}=2$$
$$\frac{15}{x+y}-\frac{4}{x-2z}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{10}{y+3z}-\frac{7}{x-2z}=-\frac{3}{2}$$

5.4.9
$$x+y+z+u=10$$
$$x+y-z-u=-4$$
$$x-y-z+u=0$$
$$-x+y+z+u=8$$

metody řešení soustav rovnic:

- substituční
- sčítací
- srovnávací
- Gaussova eliminační,

Johann Carl Friedrich Gauss (30. dubna 1777, 23. února 1855) - slavný německý matematik a fyzik, který se zabýval mimo jiné geometrií, matematickou analýzou, teorií čísel, astronomií, elektrostatikou, geodézií a optikou.

5.4.10	$$\begin{aligned} x+2y+3z+4u&=10\\ 2x+y-z+3u&=5\\ 3x+4y-z-u&=5\\ -x-2y+3z+u&=1 \end{aligned}$$	
5.4.11	$\begin{aligned} ax+y&=1\\ x+ay&=1 \end{aligned}$, a je parametr	
5.4.12	$\begin{aligned} ax-2y&=3\\ 3x+ay&=4 \end{aligned}$, a je parametr	
5.4.13	$\begin{aligned} \frac{x+y}{y}&=a\\ 1+\frac{xy}{a+1}&=a^2 \end{aligned}$, a je parametr	

Zkuste se žáky řešit i diofantovské rovnice.
Diofantos z Alexandrie (3. stol. n. l.) - řecký matematik

5.5 Problémové úlohy

5.5.1 Konference se zúčastnilo 60 delegátů, z nichž každý ovládal alespoň jeden ze tří jednacích jazyků (angličtinu, arabštinu, francouzštinu). Žádný účastník neuměl současně anglicky a francouzsky. Anglicky hovořilo 30 delegátů, arabsky 36 a francouzsky 28. Kolik delegátů hovořilo pouze arabsky? Kolik delegátů hovořilo právě dvěma jazyky?

5.5.2 Ze 129 studentů jednoho ročníku univerzity chodí pravidelně do menzy na oběd nebo na večeři 116 studentů, 62 studentů dochází na nejvýše jedno z těchto jídel. Přitom na obědy chodí o 47 studentů více než na večeři. Kolik studentů chodí do menzy na obědy i večeře, kolik na večeře, kolik jenom na obědy?

5.5.3 Ve škole pracoval kroužek turistický, recitační a fotografický. Každý ze 126 žáků pracuje aspoň v jednom kroužku, 46 žáků pracuje ve dvou kroužcích, žádný žák nepracuje ve všech třech kroužcích. V recitačním je ⅓ všech žáků, polovina z nich navštěvuje ještě další kroužek. V turistickém kroužku chybí jen 2 žáci k tomu, aby měl dvojnásobný počet členů než fotografický kroužek. Polovina všech žáků navštěvujících právě jeden kroužek patří do turistického kroužku. Kolik žáků je v turistickém kroužku a kolik zároveň v recitačním i fotografickém?

5.5.4 Výrobky vyřazené výstupní kontrolou měly 3 druhy závad. Z 800 kontrolovaných výrobků bylo 97% bez závad. Polovina vadných výrobků měla závadu A, čtvrtina vadných výrobků měla pouze závadu B. Všechny výrobky s vadou C měly i vadu B a ⅓ z nich měla i vadu A. Závadu A i B mělo 7 výrobků.

a) Kolik výrobků mělo pouze závadu A?

b) Kolik výrobků mělo závadu C?

c) Kolik výrobků má všechny 3 vady?

5.5.5 V kanceláři Čedoku prodali během jednoho dne celkem 166 poukazů na zahraniční zájezdy. Leteckých zájezdů bylo prodáno dvakrát víc než zájezdů do Chorvatska. Zájezdů do Chorvatska, jež nejsou letecké, bylo prodáno o 40 více než leteckých zájezdů do Chorvatska. Zájezdů, jež nejsou ani letecké ani do Chorvatska, bylo prodáno o 30 méně než těch zájezdů do Chorvatska, jež nejsou letecké.

a) Kolik zájezdů do Chorvatska bylo prodáno?

b) Kolik bylo prodáno leteckých zájezdů jinam než do Chorvatska?

5.5.6 Ve třídě je 33 žáků. Někteří se přihlásili do soutěží MO, FO a SOČ. Z nich 6 dělalo jen SOČ. Všech tří soutěží se nezúčastnil nikdo. Jen MO a jen SOČ se zúčastnil stejný počet žáků, což byl dvojnásobek těch, kteří dělali jen FO. Těch, žáků, kteří se zúčastnili MO nebo FO, ale ne SOČ, bylo 13. Těch, kteří vypracovali současně MO a FO bylo dvakrát tolik, co účastníků MO a zároveň SOČ. Aspoň jedné soutěže se zúčastnilo 22 žáků.

Kolik žáků se zúčastnilo MO, kolik FO a kolik SOČ?

5.5.7 Ve 140 domácnostech proběhl průzkum energie užívané k topení a vaření. Pevná paliva užívá 55 domácností, ale jen pevná paliva žádná domácnost. Elektřinu užívá 80 domácností, svítiplyn 105 domácností. Svítiplyn, ale ne pevná paliva, užívá 65 domácností. Všech tří druhů užívá 5 domácností, právě dvou druhů 90 domácností.

a) V kolika domácnostech užívají jen svítiplyn?

b) V kolika užívají elektřinu nebo svítiplyn a přitom bez pevných paliv?

5.5.8 V přírodovědném kroužku je 15 studentů. Biologií se zabývá 8

studentů, chemií 9 studentů, fyzikou 7 studentů. Žádný ze studentů není současně biolog a fyzik, pouze jedním oborem se zabývá 6 studentů. Předpokládáme, že každý student se zabývá alespoň jedním oborem. a) Kolik studentů se zabývá jenom chemií? b) Kolik studentů se chemií nezabývá vůbec? **5.5.9** Ze 35 žáků jedné třídy bylo 7 žáků o prázdninách na rekreaci v Jugoslávii a právě tolik v Bulharsku, Rumunsko navštívilo 5 žáků. V žádné z těchto tří zemí nebylo 21 žáků, všechny tři navštívil 1 žák. V Bulharsku i v Rumunsku byli 2 žáci, v Rumunsku i v Jugoslávii 1 žák. Kolik žáků navštívilo o prázdninách a) Jugoslávii nebo Bulharsko b) Rumunsko nebo Jugoslávii c) Bulharsko nebo Rumunsko?	

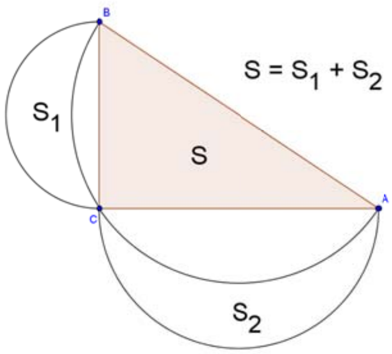
Vyzkoušejte problémové vyučování i učení, badatelské vyučování, konstruktivistické přístupy k vyučování.

6. Planimetrie

6.1 Početní úlohy	
6.1.1 Je dáno n různých přímek, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři neprocházejí týmž bodem. Na kolik částí rozdělí tyto přímky rovinu?	kombinatorika,
6.1.2 Osy vnitřních úhlů trojúhelníku *ABC* se protínají v bodě *S*. Vyjádřete velikost úhlu *ASB* pomocí úhlu γ ($\lvert\angle ACB\rvert=\gamma$).	součet úhlů v trojúhelníku,
6.1.3 Osy vnějších úhlů pravoúhlého trojúhelníku *ABC* ($\lvert\angle ACB\rvert=90^0$) při vrcholech *A*, *B* se protínají v bodě *S*. Určete velikost konvexního úhlu *ASB*.	podobnost trojúhelníků,
6.1.4 Určete poměr obsahu trojúhelníku *ABC* a trojúhelníku sestrojeného z jeho těžnic.	mnohoúhelníky,
6.1.5 Do kružnice o poloměru *r* je vepsán pravidelný pětiúhelník. Vypočítejte jeho obvod a obsah. Řešte tuto úlohu i pro další pravidelné mnohoúhelníky.	
6.1.6 Pravidelný *n*-úhelník má 54 úhlopříček a poloměr kružnice jemu opsané je $r=14cm$. Vypočítejte jeho obvod a obsah.	trigonometrie pravoúhlého trojúhelníku,
6.1.7 Nad stranami pravoúhlého trojúhelníku *ABC* s odvěsnami délek *a*, *b* a přeponou délky *c* jsou sestrojeny vně trojúhelníku čtverce. Spojte jejich vrcholy úsečkami tak, abyste dostali šestiúhelník. Vypočítejte jeho obsah.	podobnost trojúhelníků,
6.1.8 Do rovnostranného trojúhelníku *ABC* o straně *a* je vepsán čtverec. Vypočítejte obsah a obvod tohoto čtverce.	Pythagorova věta,
6.1.9 Je dána kružnice $k(S;7cm)$ a bod *M*, $\lvert MS\rvert=11cm$. Vypočítejte délku tečny *MT* vedené z bodu *M* ke kružnici *k*.	**Pythagoras ze Samu** (6. stol. př. n. l.) - starořecký filosof

Veďte žáky k črtání obrázků „od ruky“.

6.2 Důkazové úlohy	
6.2.1 Dokažte, že v každém konvexním n-úhelníku je součet velikostí všech vnějších úhlů roven 360°**.**	mnohoúhelníky,
6.2.2 Dokažte, že v trojúhelníku *ABC* platí $\frac{1}{2}(a+b+c) < t_a + t_b + t_c < a+b+c$. **6.2.3** Dokažte, že přímky spojující vrchol *A* rovnoběžníku *ABCD* se středy stran *BC*, *CD* rozdělují úhlopříčku *BD* na tři stejné části.	trojúhelníkové nerovnosti, vlastnosti těžnic trojúhelníku,
6.2.4 Je dán ostroúhlý trojúhelník *ABC*. Nad jeho stranami jsou sestrojeny vně trojúhelníku *ABC* rovnostranné trojúhelníky *ACM* a *ANB*. Dokažte, že platí $\lvert BM \rvert = \lvert CN \rvert$.	shodnost trojúhelníků,
6.2.5 Vně daného trojúhelníku *ABC* jsou sestrojeny čtverce *ACDE* a *BCGF*. Dokažte, že $\lvert AG \rvert = \lvert BD \rvert$. **6.2.6** Pro strany a výšky trojúhelníku *ABC* platí $a : b : c = \frac{1}{v_a} : \frac{1}{v_b} : \frac{1}{v_c}$. Dokažte.	vlastnosti výšek trojúhelníku, podobnost trojúhelníků,
6.2.7 Důkaz Pythagorovy věty **6.2.8** Důkaz Euklidových vět **6.2.9** Dokažte, že v každém lichoběžníku *ABCD* platí mezi délkami *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* (*a*, *c* jsou délky základen, *a* >*c*, *b*, *d* délky ramen, *e*, *f* délky úhlopříček) vztah $e^2 + f^2 = b^2 + d^2 + 2ac$.	**Euklides z Alexandrie** (asi 325 – asi 260 př. n. l.) - antický geometr
6.2.10 Dokažte, že součet tzv. Hippokratových měsíců, tj. ploch vymezených oblouky půlkružnic sestrojených nad stranami pravoúhlého trojúhelníku *ABC* ($\lvert \angle C \rvert = 90^0$) v polorovině *ABC*, je roven obsahu trojúhelníku *ABC*.	**Hippokratés** (460 – asi 377 př. n. l.) - starořecký lékař, zakladatel racionálního lékařství
6.2.11 Důkaz věty o obvodovém a středovém úhlu **6.2.12** Jsou dány dvě kružnice, které mají vnější dotyk. Tětivy, které spojují průsečíky libovolných dvou sečen procházejících bodem dotyku s kružnicemi, jsou navzájem rovnoběžné. Dokažte. **6.2.13** Je dán rovnoramenný trojúhelník *ABC* (*AB* je základna). Dokažte, že součet vzdáleností každého bodu *X* základny *AB* od přímek *AC* a *BC* je konstantní.	obsah kruhu, goniometrické funkce ostrého úhlu,



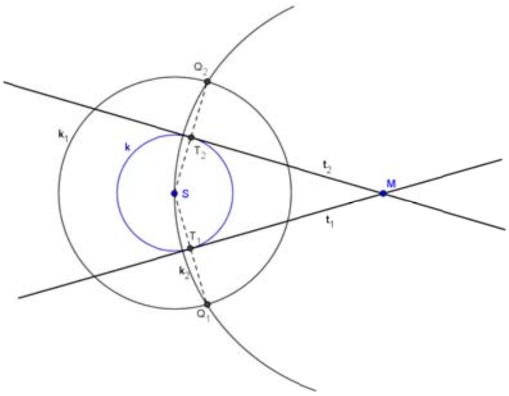
***6.3 Pravidelné mnohoúhelníky** (konstrukce pravidelných n-úhelníků, hvězdicové mnohoúhelníky)* **6.3.1** Přibližná konstrukce pravidelného pětiúhelníku a desetiúhelníku; pentagram. **6.3.2** Přibližná konstrukce pravidelného devítiúhelníku vepsaného do kružnice k (S, r). **6.3.3** Konstrukce hvězdicových osmiúhelníků, devítiúhelníků, ...	řešitelnost geometrických konstrukčních úloh danými prostředky,

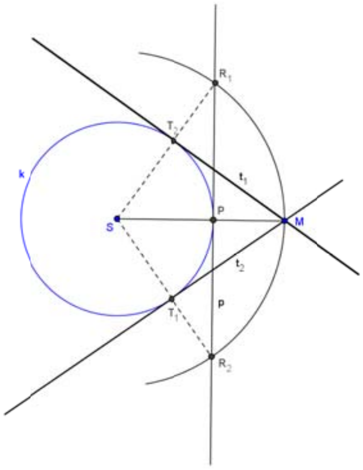
Vhodné učivo pro zadání projektu.

6.4 Mocnost bodu ke kružnici **6.4.1** Jsou dány body *A*, *B*, *C*, které neleží v přímce, a bod *M* uvnitř úsečky *AB*, $\lvert MA \rvert = 8cm, \lvert MB \rvert = 6cm, \lvert MC \rvert = 4\sqrt{2}cm$. Určete vzdálenost průsečíku *D* přímky *MC* s kružnicí opsanou trojúhelníku *ABC* od bodu *M*. **6.4.2** Je dána kružnice $k(S; r = 7cm)$ a bod *M*; $\lvert MS \rvert = 11cm$. Vypočítejte délku tečny *MT* vedené bodem *M* ke kružnici *k*. **6.4.3** Sestrojte kružnici, která prochází dvěma danými body a dotýká se dané přímky.	mocnost bodu ke kružnici,

Vhodné učivo pro zadání projektu.

6.5 Euklidovské konstrukce **6.5.1** Tečna z bodu ke kružnici (využitím bez Thaletovy kružnice – viz obrázky) **6.5.2** K dané přímce *p* sestrojte daným bodem *M* rovnoběžku užitím pouze kružítka a pravítka s jedinou přímou hranou. **6.5.3** K dané přímce *p* sestrojte daným bodem *M* kolmici užitím pouze kružítka a pravítka s jedinou přímou hranou.	 konstrukce pouze pomocí pravítka a kružítka,





<table>
<tr>
<td>

6.6 Konstrukční úlohy řešené užitím množin bodů dané vlastnosti

6.6.1 Jsou dány dvě rovnoběžné přímky a, b ve vzdálenosti 4cm. Najděte množinu všech bodů X, pro které platí $|Xa| + |Xb| = 6cm$.
6.6.2 Určete množinu těžišť všech pravoúhlých trojúhelníků se společnou přeponou AB.
6.6.3 Sestrojte trojúhelníka ABC, pro který platí $a = 5cm$, $\alpha = 45^0$, $\rho = 1,5cm$.
6.6.4 Sestrojte tečnový čtyřúhelník $ABCD$, pro který platí $a = 7,5cm$, $b = 3,5cm$, $\alpha = 45^0$, $\rho = 2,5cm$.
6.5.5 Sestrojte dvojstředový čtyřúhelník $ABCD$, je-li dáno $\alpha = 60^0$, $\beta = 75^0$, $\rho = 2,5cm$.
6.6.6 Je dána úsečka AB $(|AB| = 6cm)$. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, pro které platí $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $t_b = \mathrm{d}\ cm$, kde $d \in R^+$.
6.6.7 Je dána úsečka AB $(|AB| = 6cm)$. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, pro které platí $t_b = 3\ cm$, $\alpha \in (0, \pi)$.
6.6.8 Je dána úsečka AB $(|AB| = 6cm)$. Sestrojte všechny kosodélníky $ABCD$, pro které platí $\varepsilon = 120^0, v_a = h\ cm$, kde $h \in R^+$.
6.6.9 Je dána úsečka AB $(|AB| = 6cm)$. Sestrojte všechny kosodélníky $ABCD$, pro které platí $v_a = 2cm, \varepsilon \in (0, \pi)$.

</td>
<td>

množiny bodů dané vlastnosti,
Thalés z Milétu (asi 624 – asi 548 př. n. l.) - starořecký mudrc

konstrukce trojúhelníků a čtyřúhelníků,

úlohy s parametrem,

</td>
</tr>
</table>

Využití software Geogebra, příp. Cabri při řešení konstrukčních úloh všech typů.

6.7 Zobrazení: konstrukční úlohy řešené využitím shodných zobrazení a stejnolehlosti, skládání zobrazení

6.7.1 Sestrojte trojúhelník *ABC*, je-li dáno $o = 12cm, \alpha = 60^0, \beta = 45^0$.

užití osové souměrnosti,

6.7.2 Sestrojte čtverec *ABCD*, je-li dáno $a + e = 10cm$.
6.7.3 Sestrojte kosočtverec *ABCD*, je-li dáno: $\alpha, a + f$ ($f = BD$).
6.7.4 Sestrojte obdélník *ABCD*, je-li dáno $e = 7cm, a - b = 1cm$.
6.7.5 Sestrojte lichoběžník *ABCD* ($AB \parallel CD$), je-li dáno $b = 3cm, c = 2,5cm$, $d = 2,6cm, \alpha - \beta = 20^0$.
6.7.6 Jsou dány čtyři kružnice k_1, k_2, k_3, k_4 a bod *S*. Sestrojte rovnoběžník *ABCD* se středem *S*, jehož vrcholy *A*, *B*, *C*, *D* leží po řadě na kružnicích k_1, k_2, k_3, k_4.

užití středové souměrnosti,

6.7.7 V rovině je dáno pět různých bodů S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, které neleží v přímce. Sestrojte všechny uzavřené lomené čáry *ABCDEA*, pro něž jsou body S_1, S_2, S_3, S_4 a S_5 po řadě středy stran *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EA*.
6.7.8 Jsou dány tři různé body *M, N, S*, které neleží na jedné přímce. Sestrojte čtverec *ABCD* se středem v bodě *S* tak, aby $M \in \leftrightarrow AB, N \in \leftrightarrow CD$.
6.7.9 Vyhledejte místo na řece šířky *d*, ve kterém by měl stát most ve směru kolmo na tok řeky tak, aby cesta z obce *A* do obce *B*, které leží na různých stranách řeky mimo její břehy, byla nejkratší.

užití posunutí,

6.7.10 Je dána kružnice $k(S, r)$, bod *B* a úsečka délky *d* ($d < 2r$). Sestrojte tětivu *XY* kružnice *k* délky *d* tak, aby byla vidět z bodu *B* pod úhlem 60^0.
6.7.11 Jsou dány tři kružnice $k_1(S, r_1), k_2(S, r_2), k_3(S, r_3)$, $r_1 < r_2 < r_3$ a bod $B \in k_2$. Sestrojte rovnostranný trojúhelník *ABC* tak, aby $A \in k_1$ a $C \in k_3$.

užití otočení,

6.7.12 Sestrojte přímku, která prochází bodem *A* a nepřístupným průsečíkem přímek *p* a *q*.

užití stejnolehlosti,

6.7.13 Sestrojte střed úsečky *AB*, je-li bod *B* nepřístupným průsečíkem přímek *p* a *q*.
6.7.14 Je dána kružnice $l(O, r)$ a její vnější přímka *t* s bodem *A*. Sestrojte kružnici, která se dotýká dané přímky v bodě *A* a dané kružnice *l*.
6.7.15 Jsou dány dvě různoběžky *a,b* a kružnice *k(S,r)*. Sestrojte kružnici, která se dotýká obou daných přímek a dané kružnice.

Apolloniovy a Pappovy úlohy,
Apollonius z Pergy (starořecký matematik, 262 – asi 190 př. n. l.)
Pappos z Alexandrie (řecký geometr, asi 290 př. n. l. – asi 350 př. n. l.)

6.7.16 Je dána přímka *p*, kružnice *k* a bod *A*. Sestrojte trojúhelník *ABC* tak, aby $B \in p, C \in k, \alpha = 60^0, |AC| = 2 \cdot |AB|$.
6.7.17 Je dána kružnice a čtverec s hranicí *h*, které se protínají v bodech *K* a *Q*. Sestrojte všechny obdélníky *KLMN*, pro které platí $L \in k, N \in h, |KL| = 2 \cdot |KN|$.
6.7.18 Jsou dány dvě různé rovnoběžné přímky *p*, *q* a bod *A* ($A \notin p, A \notin q$). Sestrojte všechny pravoúhlé trojúhelníky *ABC* ($|\sphericalangle C| = 90^0$) tak, aby platilo $B \in p$, $C \in q, |\sphericalangle BAC| = 30^0$.
6.7.19 Jsou dány dvě kružnice $k_1(S_1; 3cm)$, $k_2(S_2; 3,5cm)$ a bod *A*, $|AS_1| = 7cm$, $|AS_2| = 6cm$, $|S_1S_2| = 4cm$. Sestrojte rovnostranný trojúhelník *ABC* tak, aby $B \in k_1, T \in k_2$, kde *T* je těžiště trojúhelníku *ABC*.
6.7.20 Skládání zobrazení; osová souměrnost jako základní shodné zobrazení; posunutá souměrnost a identita; homotetie jako základní podobné zobrazení.

skládání zobrazení,

6.7.21 Je dán pravidelný osmiúhelník *ABCDEFGH* se středem *S*. Určete zobrazení, v němž je obrazem trojúhelníku *ABD* trojúhelník a) *AHF*, b) *HGE*, c) *EFH*, d)

BCE, e) *GHB*. Vytvořte tato zobrazení složením osových souměrností. **6.7.22** Je dán čtverec *ABCD* se středem *S*. Určete poměr podobnosti, která zobrazuje body *A*, *B*, *S* po řadě na body *B*, *D*, *C*.	

Vhodné učivo pro zadání projektu.

6.8 Algebraické konstrukce	
6.8.1 Sestrojte úsečku délky a) $\sqrt[4]{2}$, b) $\sqrt[4]{3}$.	konstrukce „odmocnin“,
6.8.2 Jsou dány úsečky *a, b*. Sestrojte úsečku délky a) $a\sqrt{2}+b\sqrt{3}$, b) $\sqrt{\frac{a\sqrt{5}}{3}}$, c) $\frac{a\sqrt[4]{2}}{b}$, d) $\frac{ab}{a+b}$, e) $\frac{ab}{a-b}$, f) $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b}$.	geometrické konstrukce algebraických výrazů,
6.8.3 Jsou dány úsečky délek *a*, *b*, *c*. Sestrojte úsečky, které mají délky a) $\sqrt{a^2-bc}\ (a^2>bc)$, b) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, c) $\sqrt{a^2+b^2+ab}$, d), $\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{c}$ e) $\frac{\sqrt{a^2+bc}}{a}$, f) $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{c}$ $(a>b)$, g) $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2+bc}}$.	
6.8.4 Je dán kruh *K* (*S*; *r*). Sestrojte kružnici se středem *S*, která dělí kruh na dvě části o stejném obsahu. **6.8.5** Jsou dány soustředné kružnice k_1 a k_2 o středu *S* a poloměrech r_1 a r_2. Sestrojte kružnici se středem *S*, která dělí mezikruží s hranicemi v kružnicích k_1 a k_2 na dvě části o stejném obsahu. **6.8.6** Je dán trojúhelník *ABC*. Rozdělte tento trojúhelník přímkou *p* na dvě části, které mají stejný obsah. Přímku *p* volte a) rovnoběžnou se stranou *AB*, b) kolmou ke straně *AB*.	mezikruží,

Nechejte žáky tvořit analogické úlohy.

7. Funkce

7.1 Exponenciální a logaritmické rovnice, nerovnice, funkce

7.1.1 Řešte rovnice s neznámou $x \in R$:

a) $\dfrac{6^{x^2}}{2^{-15}} = \dfrac{3^{-15}}{6^{12-12x}}$

b) $0{,}25^{2-\sqrt{5x+1}} = 4.2^{\sqrt{5x+1}}$

c) $9^{x(x-1)-0,5} = \sqrt{3}$

d) $3^x.\left(\dfrac{1}{2}\right)^x + 3^{x+1}.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1} = \dfrac{5}{3}$

e) $2^{2x}.5^x - 2^{2x-1}.5^{x+1} = -600$

f) $3^x + 3^{x+1} - 5^{x+1} = 5^x - 3^{x+3} + 5^{x+2}$

g) $\dfrac{2^{x+3}.3^{x+2}}{6^{7-x}.8^{x-1}} = \dfrac{9^{x-2}}{3}$

h) $9^{x-0.5} + 9^{0.5-x} = \dfrac{10}{3}$

i) $2\left(\dfrac{1}{4}\right)^x - 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \left[1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\right]\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-1}$

7.1.2 Řešte rovnice s neznámou $x \in R$:

a) $4\log_3(2x+1) + \log_3\sqrt{2x+1} = \dfrac{3}{2}\log_3^2(2x+1) - 6$

b) $\log_x 2 + \log_{4x} 8 = 2.\log_{4x} 16$

c) $x^{1+\log x} = 100$

d) $\sqrt[5]{x^{\log_3 x}} = 243$

e) $x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x$

f) $\left(\sqrt{x}\right)^{\log_2 x - 2} = x$

7.1.3 Řešte nerovnice s neznámou $x \in R$:

a) $2^{x+1} \geq 8$

b) $4^{2x+9} < 0{,}25$

c) $27 \geq 3^{1-3x}$

d) $0{,}5^{x+5} \leq 4$

e) $2^{3x-1} \geq 4^{x+1}$

f) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2-3x} < \dfrac{2^{x+1}}{3^{x+1}}$

7.1.4 Řešte nerovnice s neznámou $x \in R$:

a) $\log_3(2x-1) \geq \log_3(4x+3)$

b) $\log_{\frac{1}{3}}(x+4) \leq \log_{\frac{1}{3}}(5x-4)$

c) $\log(x-3) + \log(2x-1) < 0$

d) $\log_{20}(x^2 - 3x) \leq \log_{20} x + \log_{20} 5$

e) $\log_{0,2}(x-3) > \log_{0,2} x - \log_{0,2} 2$

definice logaritmu,

pravidla pro počítání s logaritmy,

7.1.5 Určete, pro která $a \in R$ je funkce rostoucí a pro která $a \in R$ je klesající: a) $y = \left(\frac{a-3}{a+5}\right)^x$ b) $y = \log_{\frac{a+1}{a}} x$ **7.1.6** Načrtněte v téže soustavě souřadnic grafy těchto funkcí: a) $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$, $y = \left(\frac{3}{2}\right)^{\lvert x\rvert}$, $y = -\left(\frac{3}{2}\right)^{\lvert x\rvert}$, $y = \left(\frac{3}{2}\right)^{-\lvert x\rvert}$ b) $y = \left(\frac{7}{10}\right)^{x+1}$, $y = \left(\frac{7}{10}\right)^{\lvert x+1\rvert}$, $y = -\left(\frac{7}{10}\right)^{\lvert x+1\rvert}$, $y = \left(\frac{7}{10}\right)^{-\lvert x+1\rvert}$ c) $y = 2^x - 3$, $y = 2^{\lvert x\rvert} - 3$, $y = \left\lvert 2^{\lvert x\rvert} - 3\right\rvert$ d) $y = \log_2 x$, $y = \log_2 \lvert x\rvert$, $y = \left\lvert \log_2 \lvert x\rvert \right\rvert$ e) $y = \log_{0,5} x$, $y = \log_{0,5} \lvert x\rvert$, $y = \left\lvert \log_{0,5} \lvert x\rvert \right\rvert$ **7.1.7** Načrtněte grafy těchto funkcí: a) $y = 2^{\log_2 x}$ b) $y = \log_x x$ c) $y = x^{\log_x x}$ d) $y = \log_x \frac{1}{x}$ e) $y = \log_x x^{\sqrt{x}}$ f) $y = \log_x (\log_x x)$ **7.1.8** Určete definiční obor funkce, vypočítejte průsečíky s osami, načrtněte graf, zapište obor hodnot. Do téže soustavy souřadnic nakreslete graf funkce inverzní a pro funkci inverzní určete definiční obor, obor funkčních hodnot a předpis. a) $y = 2^{x-1} - 4$ b) $y = 0{,}5^{x+2} - 1$ c) $y = \log_2 x + 1$ d) $y = \log_2 (x+4)$ e) $y = 2 + \log_{0,5}(x+1)$	

Využívejte programy pro znázorňování průběhu funkcí, např.
Geogebra (http://www.geogebra.org/)
Graf – kreslení grafů funkcí 3.1 (http://www.slunecnice.cz/sw/graf-kresleni-grafu-funkci/)

7.2 Goniometrické výrazy, rovnice a nerovnice	
7.2.1 Vyjádřete: a) $\mathrm{tg}(x-y)$ pomocí $\mathrm{tg}\ x$ a $\mathrm{tg}\ y$ b) $\mathrm{cotg}(x+y)$ pomocí $\mathrm{cotg}\ x$ a $\mathrm{cotg}\ y$	součtové vzorce,
7.2.2 Odvoďte vzorce pro $\mathrm{tg}\ 2x$ a $\mathrm{tg}\ \frac{x}{2}$. Určete, pro která reálná čísla x platí. **7.2.3** Dokažte: $\sin x = \dfrac{2.\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}$. Zapište podmínky.	vzorce pro dvojnásobný a poloviční úhel,
7.2.4 Dokažte: $1+\sin x = \left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 = 2.\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) = 2.\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$ **7.2.5** Řešte v R rovnice: a) $\sin x+\cos x=0$ b) $\cos x-\sqrt{3}\sin x=0$ c) $\sin^2 x-6\cos^2 x+\sin x\cos x=0$ d) $\sin x+\cos x=1$ e) $\sqrt{3}\sin x+\cos x=2$ f) $\sin x+\sqrt{3}\cos x=\sqrt{2}$ g) $\sin^2 2x-\cos^2 2x=\cos 2x$ **7.2.6** Řešte v R nerovnice: a) $\lvert\sin x\rvert \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\sin 2x \leq \frac{1}{2}$ c) $\sin x > \cos x$ d) $\cos x < -\sin x$ e) $\mathrm{tg}\ x \geq \mathrm{cotg}\ x$ **7.2.7** Řešte v R soustavy nerovnic: a) $\sin x > 0{,}5$ $\cos x \geq 0{,}5$ b) $\mathrm{cotg}\ x \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$	

7.3. Složené goniometrické funkce	
7.3.1 Načrtněte graf funkce: a) $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ b) $y=\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)$ c) $y=\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ d) $y=\operatorname{cotg}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ **7.3.2** Načrtněte graf funkce: a) $y=\sin\lvert x\rvert$ b) $y=\sin\left\lvert x+\frac{\pi}{6}\right\rvert$ c) $y=\sin\left(\lvert x\rvert+\frac{\pi}{6}\right)$ d) $y=\lvert\cos x\rvert-\frac{\pi}{4}$ e) $y=\left\lvert\cos x-\frac{\pi}{4}\right\rvert$ f) $y=\cos\left\lvert x-\frac{\pi}{4}\right\rvert$ **7.3.3** Načrtněte graf funkce: a) $y=\operatorname{tg}\lvert x\rvert$ b) $y=\operatorname{tg}\lvert x\rvert-\frac{\pi}{4}$ c) $y=\operatorname{tg}\left\lvert x-\frac{\pi}{4}\right\rvert$ d) $y=\lvert\operatorname{tg} x\rvert+\frac{\pi}{4}$ e) $y=\left\lvert\operatorname{tg} x+\frac{\pi}{4}\right\rvert$ f) $y=\operatorname{tg}\left\lvert x+\frac{\pi}{4}\right\rvert$	

Využívejte programy pro znázorňování průběhu funkcí, např.
Geogebra (http://www.geogebra.org/)
Graf – kreslení grafů funkcí 3.1 (http://www.slunecnice.cz/sw/graf-kresleni-grafu-funkci/)

### *7.4 Cyklometrické funkce* **7.4.1** Uvažujme funkce • $f_1 : y = \sin x, \quad x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ • $f_2 : y = \cos x, \quad x \in \langle 0, \pi \rangle$ • $f_3 : y = \mathrm{tg}\, x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ • $f_4 : y = \mathrm{cotg}\, x, \quad x \in (0, \pi)$ Dokažte, že funkce f_1, f_2, f_3, f_4 jsou prosté (využitím jejich grafu). Načrtněte grafy funkcí inverzních k funkcím f_1, f_2, f_3, f_4. Určete jejich definiční obor a obor hodnot. Jde o tzv. **cyklometrické funkce** arcsin, arccos, arctg, arccotg.	$f_1^{-1} : y = \arcsin x$ $f_2^{-1} : y = \arccos x$ $f_3^{-1} : y = \mathrm{arctg}\, x$ $f_3^{-1} : y = \mathrm{arccotg}\, x$

8. Stereometrie

8.1 Polohové úlohy	
8.1.1 Kolik navzájem různých rovin je určeno 6 body, jestliže a) čtyři body, z nichž žádné tři neleží v téže přímce, leží v jedné rovině, b) tři z nich leží na téže přímce a žádných pět z nich neleží v téže rovině?	kombinatorická geometrie,
8.1.2 Jsou dány mimoběžné přímky *p*, *q* a body $P \in p, Q \in q$. Bodem *P* je vedena přímka $q' \parallel q$, bodem *Q* přímka $p' \parallel p$. Dokažte a) přímka *p* je rovnoběžná s rovinou qp', b) roviny qp' a pq' jsou rovnoběžné.	důkazová úloha – rovnoběžnost,
8.1.3 Sestrojte řez krychle *ABCDEFGH* rovinou *HKP*, kde bod *K* je středem hrany *AB* a bod *P* je bodem hrany *BC*, $\lvert BP\rvert : \lvert PC\rvert = 1:2$.	řez krychle („kouty“),
8.1.4 Sestrojte řez krychle *ABCDEFGH* rovinou *KLM*; bod *K* je bodem hrany *AE*, $\lvert AK\rvert : \lvert KE\rvert = 1:2$, bod *L* středem hrany *BC* a bod *M* bodem hrany *GH*, $\lvert GM\rvert : \lvert MH\rvert = 1:3$.	
8.1.5 Sestrojte řez krychle *ABCDEFGH* rovinou *XYZ*; body *X*, *Y*, *Z* jsou po řadě středy hran *DH*, *AB*, *FG*.	
8.1.6 Sestrojte řez krychle *ABCDEFGH* rovinou *MNP*; bod *M* je středem hrany *EH*, bod *N* středem hrany *CG*, bod *P* je bodem hrany *AB*, $\lvert AP\rvert : \lvert PB\rvert = 1:3$	možné obměny – body roviny na třech různých směrech hran,
8.1.7 Sestrojte řez pravidelného šestibokého hranolu $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ rovinou *KLM*, bod *K* je středem hrany *CD,* bod *L* je středem hrany *DE,* $M \in \mapsto F'F, \lvert F'F\rvert = \lvert FM\rvert$.	řez hranolu,
8.1.8 Pravidelný čtyřboký hranol $ABCDA'B'C'D'$ má podstavné hrany délky *a*, boční hrany mají délku $c = 2a$. Uvnitř hrany BB' leží bod *M*, $\lvert BM\rvert : \lvert MB'\rvert = 3:5$, uvnitř hrany CC' leží bod *N*, $\lvert CN\rvert : \lvert NC'\rvert = 7:1$. Sestrojte řez hranolu rovinou *AMN* i jeho skutečnou velikost a vypočtěte jeho obsah.	skutečná velikost řezu, obsah řezu,
8.1.9 Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu *ABCDV* rovinou *XZY*; body *X*, *Y*, *Z* leží po řadě na polopřímkách *BA*, *DA*, *VB*, $\lvert BX\rvert = \frac{3}{2}\lvert AB\rvert$, $\lvert VZ\rvert = \frac{1}{2}\lvert VB\rvert$, $\lvert DY\rvert = 2\lvert AD\rvert$.	řez jehlanu,
8.1.10 Sestrojte řez pravidelného šestibokého jehlanu *ABCDEFV* rovinou *KLM*, $K \in AV, \lvert AK\rvert : \lvert KV\rvert = 2:1$, $L \in BV, \lvert BL\rvert : \lvert LV\rvert = 1:3$, bod *M* je středem hrany *CV*.	
8.1.11 Sestrojte řez pravidelného šestibokého jehlanu *ABCDEFV* rovinou *KLM*, $K \in FV, \lvert FK\rvert : \lvert KV\rvert = 2:1$, $L \in AV, \lvert AL\rvert : \lvert LV\rvert = 1:4$, bod *M* je středem hrany *BV*.	
8.1.12 Je dána krychle *ABCDEFGH*. Sestrojte průsečnici rovin *RST* a *XYZ*; body *S*, *Z*, *T* jsou po řadě středy úseček *AB*, *CG*, *CZ* a body *X*, *Y*, *R* leží po řadě na hranách *AB*, *AE*, *EF*, $\lvert AX\rvert : \lvert XB\rvert = \lvert AY\rvert : \lvert YE\rvert = \lvert FR\rvert : \lvert RE\rvert = 2:1$.	průsečnice rovin,
8.1.13 Je dán pravidelný šestiboký hranol $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$. Sestrojte průsečnici rovin $A'B'C'$ a *MNP*, kde body *M*, *N*, *P* leží po řadě na hranách AA', BB', CC', $\lvert AM\rvert = \frac{3}{4}\lvert AA'\rvert$, $\lvert BN\rvert = \frac{1}{3}\lvert BB'\rvert$, $\lvert CP\rvert = \frac{2}{3}\lvert CC'\rvert$.	
8.1.14 Je dán čtyřstěn *ABCD*, bod *N* je vnitřním bodem stěny *ABC,* bod *M* vnitřním bodem úsečky *DN*. Sestrojte řez čtyřstěnu rovinami $\rho = \leftrightarrow BCM$ a σ, která prochází bodem *M* a je rovnoběžná s rovinou *BCD*. Určete průsečnici rovin	komplexní úloha (řez, průsečnice, rovnoběžnost),

ρ a σ a rozhodněte o její poloze vzhledem k přímce *BC* **8.1.15** Body *K* a *L* jsou po řadě středy hran *AB* a *CG* kvádru *ABCDEFGH*, body *U* a *V* leží na jeho hranách *BF* a *CG*, $\lvert BU\rvert : \lvert UF\rvert = \lvert GV\rvert : \lvert VC\rvert = 3:1$. Určete společný bod rovin *ADH*, *EKL* a *DUV*.	tři roviny,
8.1.16 Je dána krychle *ABCDEFGH*. Sestrojte průsečík přímky *CQ* s rovinou *BHP*; body *P* a *Q* jsou po řadě středy hran *AE* a *EH*. **8.1.17** Je dán pravidelný čtyřboký jehlan *ABCDV*. Sestrojte průsečík přímky *PQ* s rovinou *BCV*; bod *P* je středem hrany *DV* a bod *Q* je bodem polopřímky *AB*, $\lvert AQ\rvert = \frac{5}{4}\lvert AB\rvert$.	průsečíky přímky s rovinou,
8.1.18 Sestrojte průsečíky přímky *PQ* s povrchem krychle *ABCDEFGH*; bod *P* je bodem polopřímky *DC*, $\lvert DP\rvert = \frac{4}{3}\lvert CD\rvert$, bod *Q* bodem polopřímky *FE*, $\lvert FQ\rvert = \frac{3}{2}\lvert EF\rvert$. **8.1.19** Sestrojte průsečíky přímky *MN* s povrchem pravidelného čtyřbokého jehlanu *ABCDV*; bod *M* je bodem polopřímky *BA*, $\lvert BM\rvert = \frac{3}{2}\lvert AB\rvert$, bod *N* je středem úsečky *SV*, kde *S* je středem podstavy jehlanu.	průsečíky přímky s tělesem,
8.1.20 Místnost má tvar kvádru *ABCDEFGH*, bod *O* je středem stěny *BCGF*. Svítící bod probíhá úsečku *DF*. Určete množinu všech bodů hranice kvádru, kterými prošel stín úsečky *AO*.	aplikační úloha,
8.1.21 Určete příčku mimoběžek daným bodem a) na krychli *ABCDEFGH*; mimoběžky *AH*, *BF* a bod *D*, b) na pravidelném čtyřbokém jehlanu *ABCDV*; mimoběžky *AB*, *CV* a bod *M*, který je středem úsečky *SV*, kde *S* je středem podstavy jehlanu **8.1.22** Určete příčku mimoběžek daným směrem a) na krychli *ABCDEFGH*; mimoběžky *AH*, *BF* a směr *CH*, b) na pravidelném šestibokém hranolu $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$; mimoběžky *BC*, $A'F'$ a směr BE'.	příčky mimoběžek daným bodem a daným směrem,

Využívejte programy Cabri 3D, resp. Geogebra 3D (teprve se připravuje). Lze použít materiály na adrese http://www.geometry.cz/Sarka/index.html

8.2 Metrické úlohy	
8.2.1 Je dána krychle *ABCDEFGH*. Dokažte, že přímka *CE* je kolmá k rovině *BDG*.	Kolmost,
8.2.2 Je dána krychle *ABCDEFGH*, bod *M* je středem hrany *AB*. Určete patu kolmice vedené bodem *H* k přímce *CM*.	
8.2.3 Body *M*, *N*, *P*, *Q* jsou po řadě středy hran *AD*, *FG*, *AE*, *CG* krychle *ABCDEFGH*, bod *S* je střed úsečky *BH*. a) Dokažte, že přímky *MN* a *PQ* procházejí bodem *S* a jsou kolmé k přímce *BH*. b) Sestrojte řez krychle rovinou, která prochází bodem *S* a je kolmá k přímce *BH*.	kolmost, řez,
8.2.4 Body *M*, *N*, *P* jsou po řadě středy hran *AV*, *BV*, *FV* pravidelného šestibokého jehlanu *ABCDEFV*, délka jeho podstavných hran je $a = 4cm$, výška $v = 7cm$. Sestrojte řez jehlanu rovinou, která je kolmá k rovině podstavy a prochází body a) *M*, *N*, b) *N*, *P*. Vypočtěte obsah řezu.	kolmost, řez, obsah,
8.2.5 Je dána krychle *ABCDEFGH*. Určete odchylku přímek *KL* a *MN*, jestliže $K \in EF, L \in GH, \|EK\| : \|KF\| = \|GL\| : \|LH\| = 5:1, M \in AB, \|AM\| : \|MB\| = 3:1$ a) bod *N* je středem hrany *CG*, b) $N \in CG, \|CN\| : \|NG\| = 3:1$.	odchylka mimoběžek,
8.2.6 Podstavou kolmého trojbokého hranolu $ABCA'B'C'$ je rovnoramenný trojúhelník ABC, $\|AB\| = 3cm$, $\|AC\| = \|BC\| = 4cm$, $\|AA'\| = 4cm$. Určete početně i konstrukčně odchylku přímek $A'C$ a BC'.	
8.2.7 Je dán pravidelný pětiboký hranol $ABCDEA'B'C'D'E'$, jehož boční stěny jsou čtverce. Určete odchylku přímek BC' a DE'.	
8.2.8 Je dán pravidelný šestiboký jehlan *ABCDEFV* se středem podstavy *S*, $\|AB\| = a = 3,5cm$, $\|VS\| = v = 6cm$. Určete odchylku přímky *CM* (bod *M* je střed hrany *AV*) od roviny podstavy.	odchylka přímky od roviny,
8.2.9 Podstavou kolmého čtyřbokého hranolu $ABCDA'B'C'D'$ je kosočtverec ABCD, $\|AB\| = a, \|\angle BAD\| = 60^0$, jeho výška je *v*. Určete odchylku přímky CA' od roviny BCC'.	
8.2.10 Odchylka tělesové úhlopříčky kvádru od roviny jeho podstavy je 45^0. Určete vztah mezi jeho délkou, šířkou a výškou.	
8.2.11 Je dán pravidelný čtyřboký jehlan *ABCDV*, jehož podstavné hrany mají délku $a = 6cm$ a jehož výška je $v = 3cm$. Bod *O* je středem hrany *BC*. Veďte bodem *O* kolmici k rovině *ADV* a určete odchylku této kolmice od roviny podstavy.	kolmost, odchylka přímky od roviny,
8.2.12 Je dána krychle *ABCDEFGH*. Určete odchylku rovin *ACG* a *BCH*.	
8.2.13 Je dán pravidelný šestiboký jehlan *ABCDEFV*, délka jeho podstavných hran je *a*, jeho výška je $v = \frac{3}{2}a$. Určete odchylku rovin *ABV* a *EFV*.	odchylka rovin,
8.2.14 Je dán pravidelný trojboký hranol $ABCA'B'C'$, délka podstavné hrany je $a = 4cm$, jeho výška je $v = 4cm$. Vypočítejte odchylku rovin ABC' a BCA'.	
8.2.15 Je dán pravidelný čtyřboký hranol *ABCDEFGH*, $\|AB\| = a = 4cm$, $\|AE\| = v = 5,5cm$. Bod *M* je střed hrany *EH*. Vypočítejte vzdálenost bodu *B* od přímky *CM*.	vzdálenost bodu od přímky,
8.2.16 Pravidelný čtyřboký jehlan *ABCDV* má podstavnou hranu délky *a*, výška jehlanu je $v = a$. Bod *K* je středem hrany *CV*, bod *L* středem hrany *BC*. Který z bodů *B*, *L*, *C* má od přímky *AK* nejkratší vzdálenost?	

8.2.17 Je dán pravidelný čtyřstěn s hranou délky a. Určete součet vzdáleností jeho libovolného bodu od rovin všech jeho stěn. **8.2.18** Je dána krychle $ABCDEFGH$. Konstrukčně určete vzdálenost bodu E od roviny HKL; body K a L jsou libovolné body hran AE a EF. **8.2.19** Délka podstavné hrany pravidelného čtyřbokého hranolu $ABCDA'B'C'D'$ je a, délka bočních hran je c. Určete vzdálenost bodu B od roviny ACK, kde bod K je středem hrany $A'B'$. **8.2.20** V rovině ρ je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s odvěsnami délek a, b. Vzdálenost bodu M ($M \notin \rho$) od bodů A, B, C je m. Určete vzdálenost bodu M od roviny ρ.	vzdálenost bodu od roviny,
8.2.21 Je dán pravidelný šestiboký hranol $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$, jeho podstavné i boční hrany mají délku a. Určete vzdálenost přímek BE' a CD'.	vzdálenost rovnoběžných přímek,
8.2.22 Pravidelný trojboký hranol $ABCA'B'C'$ má podstavné hrany délky $a = 4cm$ a boční hrany délky $b = 5cm$. Konstrukčně určete vzdálenost přímek AB a $A'C$. **8.2.23** Určete vzdálenost mimoběžek AB a CD, kde body A, B, C a D jsou vrcholy pravidelného čtyřstěnu.	vzdálenost mimoběžných přímek,
8.2.24 V krychli $ABCDEFGH$ s hranou délky a je bod M středem hrany AE a bod N středem hrany CG. Určete vzdálenost přímky MN od roviny DEG.	vzdálenost přímky od roviny s ní rovnoběžné,
8.2.25 Podstavami kosého šestibokého hranolu $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ jsou pravidelné šestiúhelníky, délka podstavných hran je a, délka bočních hran b. Boční stěna $BCC'B'$ je obdélník a odchylka rovin BEE' a FCC' je $\varphi, \varphi \in (60^0, 90^0\rangle$. Určete objem hranolu. **8.2.26** Kosý jehlan, jehož podstavou je pravidelný pětiúhelník o straně délky $a = 4,5cm$, má jednu boční hranu kolmou k rovině podstavy; její délka je $b = 8cm$. Určete povrch jehlanu. **8.2.27** Pravidelný trojboký hranol má objem $V = 125cm^3$, odchylka dvou stěnových úhlopříček vycházejících ze stejného vrcholu je $\varphi = 52^0$. Určete délku jeho podstavné hrany.	objemy a povrchy těles,

8.3 Shodná a podobná zobrazení v prostoru	
8.3.1 Rovinová souměrnost a) definice a vlastnosti, b) určení rovin souměrnosti některých těles. **8.3.2** Určete množinu všech bodů v prostoru, které mají stejnou vzdálenost od a) tří daných různých bodů, které neleží v téže přímce, b) čtyř daných různých bodů, které neleží v téže rovině. **8.3.3** Je dána krychle *ABCDEFGH*, bod P je středem hrany *AB*. V rovinové souměrnosti podle roviny *CGP* zobrazte a) čtverec *BCGF*, b) trojúhelník *BGE*. **8.3.4** Pravidelný čtyřboký jehlan *ABCDV* zobrazte v rovinové souměrnosti podle roviny *VSM*; bod *S* je středem podstavy jehlanu a bod *M* je bodem hrany *AB*, $\lvert AM\rvert : \lvert MB\rvert = 1:3$. **8.3.5** Bod *M* je středem hrany *CG* krychle *ABCDEFGH*. Určete nejkratší lomenou čáru *EXM*, jestliže bod *X* leží v rovině *ABC*.	rovinová souměrnost,
8.3.6 Středová souměrnost a) definice a vlastnosti, b) určení středů souměrnosti některých těles. **8.3.7** Krychli *ABCDEFGH* zobrazte ve středové souměrnosti podle a) bodu *H*, b) středu *M* úsečky *BC*, c) středu *O* stěny *ABCD*. **8.3.8** Určete obraz pravidelného čtyřbokého jehlanu *ABCDV* ve středové souměrnosti podle bodu *O*; bod *O* je středem úsečky *SV*, kde *S* je středem podstavy. Určete průnik jehlanu a jeho obrazu.	středová souměrnost,
8.3.9 Osová souměrnost a) definice a vlastnosti, b) určení os souměrnosti některých těles. **8.3.10** Pravidelný čtyřstěn *ABCD* zobrazte v osové souměrnosti s osou v přímce a) *AB*, b) *CT*, kde bod *T* je těžištěm trojúhelníku *ABC*.	osová souměrnost,
8.3.11 Otočení kolem přímky – definice, vlastnosti **8.3.12** Určete obraz kvádru *ABCDEFGH* v otočení podle osy *AE*, které otočí bod *B* do bodu polopřímky *AD*. **8.3.13** Sestrojte obraz pravidelného čtyřbokého jehlanu *ABCDV* v otočení kolem přímky *SV*, bod *S* je středem podstavy, je-li úhel otočení $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Určete průnik jehlanu a jeho obrazu.	otočení,
8.3.14 Posunutí – definice, vlastnosti **8.3.15** Bod *M* je vnitřním bodem hrany *AB* a bod *N* vnitřním bodem hrany *CD* čtyřstěnu *ABCD*. Sestrojte řez čtyřstěnu rovinou, která je obrazem roviny *ABC* v posunutí určeném orientovanou úsečkou ***MN***. **8.3.16** Body *K*, *L*, *M* jsou body hran krychle; bod *K* je bodem hrany *AB*, $\lvert AK\rvert = \frac{1}{3}\lvert AB\rvert$, body *L* a *M* jsou po řadě středy hran *EH* a *GH*. Sestrojte úsečku *XY*, pro kterou platí: $XY \parallel LM, XY \cong LM$, $X \in \leftrightarrow EK$, $Y \in \leftrightarrow BCG$.	posunutí,
8.3.17 Stejnolehlost – definice, vlastnosti **8.3.18** Těžiště všech čtyř stěn pravidelného čtyřstěnu *T* jsou vrcholy pravidelného čtyřstěnu T'. Určete stejnolehlost, která zobrazuje čtyřstěn *T* na čtyřstěn T'.	stejnolehlost,
8.3.19 Skládání zobrazení; rovinová souměrnost jako základní shodné zobrazení; stejnolehlost jako základní podobné zobrazení. **8.3.20** Je dána krychle *ABCDEFGH* a body *K*, *L*, *M*, které jsou po řadě středy hran	skládání zobrazení, Platonova tělesa a

AB, *EF*, *GH*; bod *O* je středem stěny *ABFE*. Sestrojte obrazy bodů *A*, *K*, *E* a *O* v zobrazení složeném z rovinových souměrností podle rovin *BEH* a *KLM* v tomto pořadí. **8.3.21** Je dána krychle *ABCDEFGH* a bod *P* tak, že bod *H* je středem úsečky *DP*. Rozložte na rovinové souměrnosti zobrazení *Z*, ve kterém je a) $A \to E, B \to F, C \to G, H \to P$, b) $A \to C, B \to D, D \to B, E \to G$, c) $A \to F, B \to G, C \to H, G \to P$.	Archimédova tělesa, **Platon** (řecký filosof, pedagog a matematik, 427 př. n. l. – 347 př. n. l.) **Archimédés ze Syrakus** (řecký matematik, fyzik, filozof, vynálezce a astronom, 287 př. n. l. – 212 př. n. l.)

9. Kombinatorika, pravděpodobnost

<table>
<tr><td>

9.1 Skupiny s opakováním

9.1.1 Určete počet všech čtyřciferných čísel dělitelných čtyřmi, v nichž se vyskytují pouze cifry 1, 2, 3, 4, 5.
9.1.2 Určete, kolika způsoby lze *k* různých prvků rozmístit do *r* přihrádek.
9.1.3 Jméno a příjmení každého obyvatele městečka s 1500 obyvateli může začínat jedním ze 32 písmen. Dokažte, že aspoň dva obyvatelé tohoto městečka mají stejné iniciály.
9.1.4 Určete, kolika způsoby je možno přemístit písmena slova BATERKA tak, aby se souhlásky a samohlásky střídaly.
9.1.5 Klenotník vybírá do prstenu tři drahokamy, k dispozici má tři rubíny, dva smaragdy a pět safírů. Kolika způsoby může tento výběr provést, považujeme-li kameny téhož druhu za stejné?
9.1.6 Kombinace s opakováním
9.1.7 Určete počet kvádrů, jejichž velikosti hran jsou přirozená čísla nejvýše rovna deseti. Kolik je v tomto počtu krychlí?
9.1.8 V novinovém stánku je ke koupi deset druhů pohledů, přičemž každý druh je k dispozici v padesáti exemplářích. Určete, kolika způsoby lze zakoupit
a) 15 pohledů,
b) 51 pohledů,
c) 8 různých pohledů.
9.1.9 Ze všech bílých šachových figurek bez krále a dámy (tj. z osmi pěšců, dvou věží, dvou jezdců a dvou střelců) vybereme a) trojici, b) dvojici. Jaký je počet možností pro jejich složení?
9.1.10 V sadě 32 karet je každá z následujících karet čtyřikrát: sedmička, osmička, devítka, desítka, spodek, svršek, král, eso; karty téže hodnoty jsou přitom rozlišeny těmito „barvami“: červená, zelená, žaludy, kule. Určete, kolika způsoby je možno vybrat čtyři karty, jestliže se
a) rozlišují pouze „barvy“ jednotlivých karet,
b) rozlišují pouze hodnoty jednotlivých karet.
9.1.11 Určete počet všech Apolloniových a Pappových úloh.
9.1.12 Kolik různých neuspořádaných trojic mohou dát počty ok na jednotlivých kostkách při vrhu třemi kostkami?
9.1.13 V samoobsluze mají čtyři druhy kávy, každý po padesáti gramech. Určete, kolika způsoby lze koupit 250 gramů kávy, jestliže
a) balíčků každého druhu mají dostatečný počet,
b) od dvou druhů mají deset balíčků a od zbývajících dvou pouze po čtyřech balíčcích.

</td><td>

variace s opakováním,

permutace s opakováním,

kombinace s opakováním,

</td></tr>
</table>

9.2 Kombinatorické úlohy	
9.2.1 Určete, kolika způsoby může m chlapců a n dívek nastoupit do zástupu tak, aby a) nejdříve stály všechny dívky a pak všichni chlapci, b) mezi žádnými dvěma chlapci nebyla žádná dívka ani mezi žádnými dvěma dívkami nebyl žádný chlapec, c) mezi žádnými dvěma chlapci nebyla žádná dívka. **9.2.2** Určete, kolika způsoby se kolem kulatého stolu může posadit pět mužů a pět žen tak, aby žádné dvě ženy neseděly vedle sebe.	permutace,
9.2.3 Je dán čtverec $ABCD$ a na každé jeho straně n ($n \geq 3$) vnitřních bodů. Určete počet všech trojúhelníků s vrcholy v těchto bodech. **9.2.4** Na černá políčka šachovnice 8 x 8 máme rozmístit 12 bílých a 12 černých pěšců. Určete, kolika způsoby to lze provést. **9.2.5** Určete počet průsečíků všech úhlopříček konvexního n-úhelníku, nemají-li žádné tři společný vnitřní bod. **9.2.6** Strany konvexního osmiúhelníku, z nichž žádné dvě nemají stejnou délku, máme obarvit tak, aby dvě byly červené, dvě modré, dvě zelené a dvě žluté. Určete počet způsobů, jimiž to lze provést. **9.2.7** V rovině jsou dány body A, B a n přímek tak, že p jich prochází bodem A, q jich prochází bodem B a $n - (p + q)$ jich neprochází žádným z těchto bodů. Dále platí, že žádná z daných n přímek neprochází oběma body A, B, žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádný bod roviny s výjimkou bodů A, B není společným bodem tří z těchto přímek. Určete počet průsečíků daných n přímek, je-li $p \geq 2$, $q \geq 2$.	kombinace,
9.2.8 Určete počet všech trojúhelníků, z nichž žádné dva nejsou shodné a jejichž každá strana má velikost vyjádřenou jedním z čísel 4, 5, 6, 7. **9.2.9** Knihovna má pět regálů, do každého se vejde 20 knih. Určete, kolika způsoby lze do knihovny umístit 20 knih. **9.2.10** Určete, kolika způsoby lze z korunových a dvoukorunových mincí zaplatit částku a) 12 Kč, b) 4 Kč, jsou-li oba druhy mincí k dispozici v dostatečném množství. **9.2.11** Určete, kolika způsoby si mohou tři osoby rozdělit osm stejných jablek.	kombinace s opakováním,
9.2.12 Určete, kolika způsoby si mohou tři osoby rozdělit čtyři stejná jablka a šest stejných hrušek. **9.2.13** Určete, kolika způsoby lze na černá políčka šachovnice 8x8 rozmístit 12 bílých (nerozlišitelných) a 12 černých (nerozlišitelných) kostek tak, aby toto rozmístění bylo symetrické podle středu šachovnice.	permutace s opakováním,

9.3 Podmíněná pravděpodobnost, celková pravděpodobnost

9.3.1 Hodíme dvěma kostkami. Jev A značí „součet ok je sudé číslo“, jev B „součet ok je číslo dělitelné třemi“. Vypočítejte $P(A/B)$, $P(B/A)$.
9.3.2 V osudí je *b* bílých a *c* červených koulí. Táhneme postupně 2 koule, bez vracení do osudí. Nechť B_1 značí „v prvním tahu byla tažena bílá koule“, B_2 značí „v druhém tahu byla tažena bílá koule“. Vypočítejte $P(B_1)$ i $P(B_2)$.
9.3.3 Podle mínění znalců zvítězí v dostihu kůň *a* s pravděpodobností 0,5, kůň *b* s pravděpodobností 0,3. Kůň *a* však ztratil na startu mnoho délek, takže je jisté, že nezvítězí. Jaká je nyní pravděpodobnost, že zvítězí kůň *b*?
9.3.4 Podle mínění znalců zvítězí v závodě závodník *a* s pravděpodobností 0,4, závodník *b* s pravděpodobností 0,3, závodník *c* s pravděpodobností 0,2. Jestliže se závodník *a* při startu zranil a ze závodu odstoupil, jaké jsou nyní pravděpodobnosti vítězství závodníků *b* a *c*?
9.3.5 V závodě se 40 % produkce určitého výrobku vyrábí na jedné lince a 60 % produkce na druhé. Pravděpodobnost vadného výrobku je 0,004 na první a 0,008 na druhé lince. Jaká je pravděpodobnost, že výrobek je vadný?
9.3.6 Dílna vyrábí v průměru 95 % bezvadných výrobků. 30 % produkce dílny však pochází od pracovníka *b*, který odevzdává jen 90 % bezvadných výrobků. Je-li výrobek z této dílny vadný, s jakou pravděpodobností jej vyrobil pracovník *b*?
9.3.7 55 % nějaké populace tvoří ženy, 45 % muži. Je známo, že určitou chorobou trpí 1 % žen a 5 % mužů. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná osoba z populace trpí touto chorobou?
9.3.8 V nějaké populaci je 5 % diabetiků, 2 % populace jsou diabetici kuřáci. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně zvolený diabetik je kuřák?

10. Komplexní čísla

10.1 Komplexní čísla jako body Gaussovy roviny **10.1.1** V Gaussově rovině zobrazte množinu všech komplexních čísel z, pro něž platí zároveň: a) $\lvert z\rvert \geq 1$, $\lvert z-i\rvert \geq \lvert z\rvert$, $\lvert z-1\rvert \geq 1$ b) $\lvert z\rvert \geq 2$, $\lvert z+1-i\rvert \leq \sqrt{2}$, $\lvert z-1-i\rvert \leq \sqrt{2}$ c) $\left\lvert \frac{\bar{z}}{\lvert z\rvert} + \lvert z\rvert \right\rvert < 2$ d) $\left\lvert \frac{\bar{z}}{\lvert z\rvert} - \lvert z\rvert \right\rvert > \lvert z+i\rvert$ e) $\lvert z-1-i\rvert = 1$, $\lvert z-i\rvert = \lvert z-1\rvert$ **10.1.2** V Gaussově rovině znázorněte obrazy bodů, pro které platí: a) $\lvert z+3-i\rvert = 2$ b) $\lvert z-1\rvert = \lvert z+i\rvert$ c) $\lvert z+3-i\rvert = \lvert z-1+2i\rvert$ Dokažte.	analytická geometrie,

10.2 Rovnice v oboru komplexních čísel **10.2.1** Určete všechna $z \in C$, která vyhovují soustavě rovnic: $\left\|\frac{z-4}{z-8}\right\| = 1$, $\left\|\frac{z-12}{z-8i}\right\| = \frac{5}{3}$ **10.2.2** Určete všechna ryze imaginární čísla *z,* pro něž platí: a) $\|z-1-i\| = z$ b) $\|z+1\| = \|z-2i\|$ **10.2.3** V množině *C* řešte rovnice: a) $x^3 - 1 + i = 0$ b) $x^3 + 1 - i = 0$ c) $x^5 - 1 - i\sqrt{3} = 0$ d) $x^5 + 1 - i\sqrt{3} = 0$ e) $(x^4+1)^2 + 2(x^4+1) - 8 = 0$ f) $(x^3-1)^2 + (x^3+1)^2 = 0$ g) $(x+1)^4 = 81x^4$ h) $16x^4 = (x-1)^4$ i) $x^3 + 3x^2 + 3x = 7$ j) $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x = 80$ **10.2.4** V množině *C* řešte rovnice: a) $ix^2 + 2x - 5i = 0$ b) $x^4 + 2ix^2 + 8 = 0$ c) $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2 = 0$, $x_1 = i$	

11. Analytická geometrie

11.1 Vektory: lineární kombinace vektorů, vektorový a smíšený součin	
11.1.1 Zjistěte, je-li vektor **u** lineární kombinací vektorů **a**, **b**: a) **u** = (3; -1; 1), **a** = (3; 1; 0), **b** = (2; 2; -1) b) **u** = (5; 2; 5), **a** = (2; 2; 3), **b** = (-1; 2; 1)	lineární kombinace vektorů,
11.1.2 Zjistěte, zda body $A\left[11; -3; -2\sqrt{3}\right]$, $B\left[-7; -3; -2\sqrt{3}\right]$, $C\left[-7; -3; -3\sqrt{3}\right]$, $D\left[6; -3; 3\sqrt{3}\right]$ jsou vrcholy lichoběžníku.	
11.1.3 Vypočítejte vektorový součin vektorů **a**, **b**: a) **a** = (3; 1; 2), **b** = (-1; 1; 0) b) **a** = (2; 1; 1), **b** = (3; 3; 2) c) **a** = (1; 0; 3), **b** = (-1; 0; -2)	vektorový součin,
11.1.4 Vypočítejte obsah trojúhelníku *ABC*, jsou-li dány jeho vrcholy $A[1; 3; 1]$, $B[4; 1; 3]$, $C[1; 4; -1]$.	
11.1.5 Vypočítejte obsah trojúhelníku v rovině, jsou-li jeho vrcholy dány souřadnicemi $A[-1; -1]$, $B[2; 0]$, $C[1; 3]$.	
11.1.6 Vypočítejte obsah rovnoběžníku *ABCD* v rovině, jsou-li dány body $A[2; 1]$, $B[1; 3]$, $C[-2; -1]$.	
11.1.7 Vypočítejte objem čtyřstěnu *ABCD*, jsou-li dány jeho vrcholy $A[1; 2; -1]$, $B[3; -1; 1]$, $C[1; 1; 3]$, $D[-1; 2; 0]$.	smíšený součin,
11.1.8 Jsou dány body $A[1; 3; -2]$, $B[3; -2; 5]$, $C[0; 1; 7]$, $D[8; 0; 3]$. a) Vypočítejte obsahy všech stěn čtyřstěnu *ABCD*. b) Vypočítejte objem čtyřstěnu *ABCD*. c) Vypočítejte vektory, které jsou určeny všemi výškami čtyřstěnu *ABCD*.	

11.2 Vyšetřování množin bodů metodou souřadnic **11.2.1** Ukažte, že graf funkce $y = \frac{1}{x}$ je totožný s množinou všech bodů, jejichž absolutní hodnota rozdílu vzdáleností od bodů $E\left[-\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right]$ a $F\left[\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$ se rovná $2\sqrt{2}$. **11.2.2** Rovnicí $x^2 - y^2 = 1$ je dána hyperbola. Ukažte, že absolutní hodnota rozdílu vzdáleností každého bodu této hyperboly od bodů $E\left[\sqrt{2}; 0\right]$, $F\left[-\sqrt{2}; 0\right]$ se rovná 2. **11.2.3** V rovině je dán bod F a přímka q, vzdálenost bodu F od přímky q je 4. Vhodnou volbou soustavy souřadnic zjistěte, co je množinou všech bodů X roviny, pro které je $\lvert XF \rvert = \frac{\lvert Xq \rvert}{\sqrt{2}}$. **11.2.4** Určete rovnicí množinu všech bodů, které mají od počátku soustavy souřadnic třikrát větší vzdálenost než od přímky $p: x = -4$. **11.2.5** Určete rovnicí množinu všech bodů, které mají od přímky s rovnicí $x = 3$ dvakrát větší vzdálenost než od bodu $M[0; 3]$. **11.2.6** V rovině jsou dány body $A[1; 2]$, $B[2; -1]$, $C[0; 2]$. Co vyplní všechny body X roviny, pro které platí $\lvert AX \rvert^2 + \lvert BX \rvert^2 + \lvert CX \rvert^2 = 11$? **11.2.7** Co je množinou všech bodů X roviny pro které platí $\lvert XF \rvert + \lvert Xq \rvert = 6$, $F[4; 0]$, $q: x = 0$?	množiny bodů dané vlastnosti,

Veďte žáky k črtání obrázků.

11.3 Kuželosečky (tečna kuželosečky)	
11.3.1 Určete d tak, aby přímka $p: y = 2x + d$ byla tečnou kružnice s rovnicí $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 0$. Určete bod dotyku. **11.3.2** Bodem $M[2; 1]$ veďte tečny ke kružnici s rovnicí $(x-5)^2 + (y-10)^2 = 9$. **11.3.3** Určete body dotyku tečen vedených bodem $O[0; 0]$ ke kružnici s rovnicí $x^2 + y^2 + 10x + 10y + 49 = 0$. **11.3.4** Napište rovnici kružnice, která a) má střed v bodě $S[5; 4]$ a dotýká se přímky $p: 5x - 12y - 29 = 0$ b) prochází bodem $M[2; 4]$ a dotýká se obou souřadnicových os. **11.3.5** Jakou podmínku musí splňovat střed $S[m; n]$ kružnice s poloměrem r = 3, aby se kružnice dotýkala přímek, které mají rovnice $y = 2x$ a $y = \frac{1}{2}x$? **11.3.6** Pro která $p \in R$ je rovnicí $x^2 + y^2 - 2x + 8y + p = 0$ dána kružnice? Určete p tak, aby se tato kružnice: a) dotýkala osy x, b) dotýkala osy y.	kružnice, tečna kružnice,
11.3.7 Určete c tak, aby přímka, která má rovnici $y = x + c$, byla tečnou elipsy $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. **11.3.8** Určete q tak, aby přímka $y = 2x + q$ byla tečnou elipsy s rovnicí $4x^2 + 9y^2 = 36$. **11.3.9** Bodem $[-6; -2]$ veďte tečny k elipse s rovnicí $4x^2 + 9y^2 = 36$. **11.3.10** Předpokládejme, že přímka $y = 2x + c$ protíná elipsu $4x^2 + 9y^2 = 36$ ve dvou různých bodech, že je tedy její sečnou. Ukažte, že střed této dvojice průsečíků leží na přímce $2x + 9y = 0$.	elipsa, přímka a elipsa,
11.3.11 Dokažte, že pro každé $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ leží bod $M\left[\frac{a}{\cos t}; b \operatorname{tg} t\right]$ na hyperbole, která má rovnici $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Dostaneme tak všechny body této hyperboly? **11.3.12** Určete společné body rovnoosé hyperboly s rovnicí $x^2 - y^2 = 25$ a přímky, která má rovnici $y = kx + 5$. Proveďte diskusi vzhledem ke směrnici k. **11.3.13** Určete společné body rovnoosé hyperboly $x^2 - y^2 = 25$ a přímky $y = x\sqrt{2} + q$. Proveďte diskusi vzhledem k parametru q. **11.3.14** Najděte tečny hyperboly s rovnicí $2x^2 - y^2 = 2$ rovnoběžné s přímkou $p: y = 2x$.	hyperbola, přímka a hyperbola,
11.3.15 Najděte tečnu paraboly, která má rovnici $y^2 - 4y - 6x + 22 = 0$, rovnoběžnou s přímkou $p: y = x$. **11.3.16** Určete p tak, aby se parabola, která má rovnici $y^2 = 2px$, dotýkala	parabola, přímka a parabola,

přímky $q: y = \frac{x}{2} + 5$. **11.3.17** Parabola je dána rovnicí $x^2 - 2x - y + 4 = 0$. Které její tečny procházejí počátkem soustavy souřadnic?	

### *11.4 Koule, kulová plocha*	
11.4.1 Napište rovnici kulové plochy se středem $S[1;\,-2;\,3]$ a poloměrem $r=\sqrt{14}$. V kterých bodech protínají tuto kulovou plochu osy soustavy souřadnic?	koule, kulová plocha a jejich části,
11.4.2 Napište rovnici kulové plochy se středem $S[0;\,1;\,-2]$, která prochází bodem $A[1;\,4;\,0]$. Určete průsečíky této kulové plochy s přímkami, které jsou rovnoběžné s osami soustavy souřadnic a procházejí bodem A.	
11.4.3 Napište rovnici kulové plochy se středem $S[1;\,0;\,-2]$, která prochází bodem $A[5;\,-3;\,10]$. Napište rovnici tečné roviny, která se této kulové plochy dotýká v bodě A.	
11.4.4 Průnikem kulové plochy z předcházející úlohy a rovin rovnoběžných s rovinami xy, yz, xz soustavy souřadnic a procházejících bodem A jsou kružnice. Určete poloměry těchto kružnic.	rovina a kulová plocha,
11.4.5 Průnikem kulové plochy $x^2+y^2+z^2=25$ a roviny $2x-y+z+10=0$ je kružnice. Dokažte a určete její střed.	
11.4.6 Určete, pro které hodnoty d je průnikem kulové plochy $x^2+y^2+z^2-2x+4z-164=0$ a roviny dané rovnicí $4x-3y+12z+d=0$ kružnice.	přímka a kulová plocha
11.4.7 Najděte průsečíky přímky AB, $A[0;\,1;\,0]$, $B[2;\,0;\,1]$, a kulové plochy dané rovnicí $x^2+y^2+z^2-2x+4y-1=0$.	
11.4.8 Najděte společné body přímky AB, $A[-4;\,3;\,3]$, $B[-6;\,5;\,4]$, a kulové plochy dané rovnicí $x^2+y^2+z^2-2x+4y-z+3=0$.	

LITERATURA

POLÁK, J.: Středoškolská matematika v úlohách. Praha: Prometheus, 1999.
VEJSADA, J.; TALAFOUS, F.: Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia. Praha: SPN, 1969.
PETÁKOVÁ, J.: Matematika, příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám. Praha: Prometheus, 1998.
JANEČEK, F.: Sbírka úloh pro SŠ – Výrazy, rovnice, nerovnice a jejich soustavy. Praha: Prometheus 1995.
ŠEDIVÝ, J. a kol.: Úlohy o výrocích a množinách pro 1. ročník gymnázia. Praha: SPN, 1971.
VYŠÍN, J. a kol.: Úlohy z matematiky pro 4. ročník gymnázií. Praha: SPN, 1980.
Matematika pro gymnázia – soubor učebnic nakladatelství Prometheus