INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ
TENTO PROJEKT JE SPOLUFINANCOVÁN EVROPSKÝM SOCIÁLNÍM FONDEM A STÁTNÍM ROZPOČTEM ČESKÉ REPUBLIKY.

PC hry a simulace

PARTNEŘI PROJEKTU

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

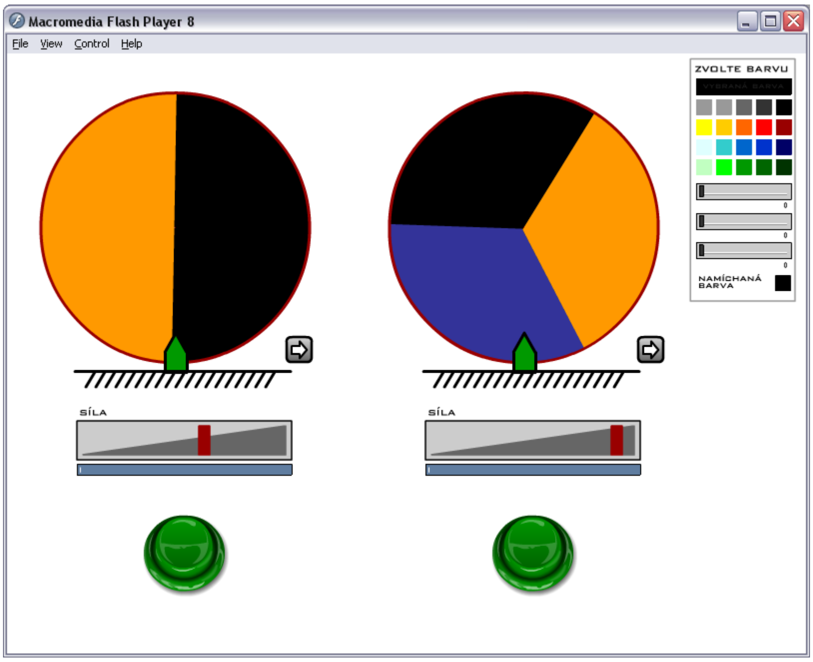
TENTO PROJEKT JE SPOLUFINANCOVÁN EVROPSKÝM SOCIÁLNÍM FONDEM A STÁTNÍM ROZPOČTEM ČESKÉ REPUBLIKY.

RULETKY

Aplikace by měla sloužit k demonstraci některých stochastických jevů a problémů, měla by vést žáky k samostatnému experimentování, formulaci hypotéz a jejich experimentálnímu ověřování.

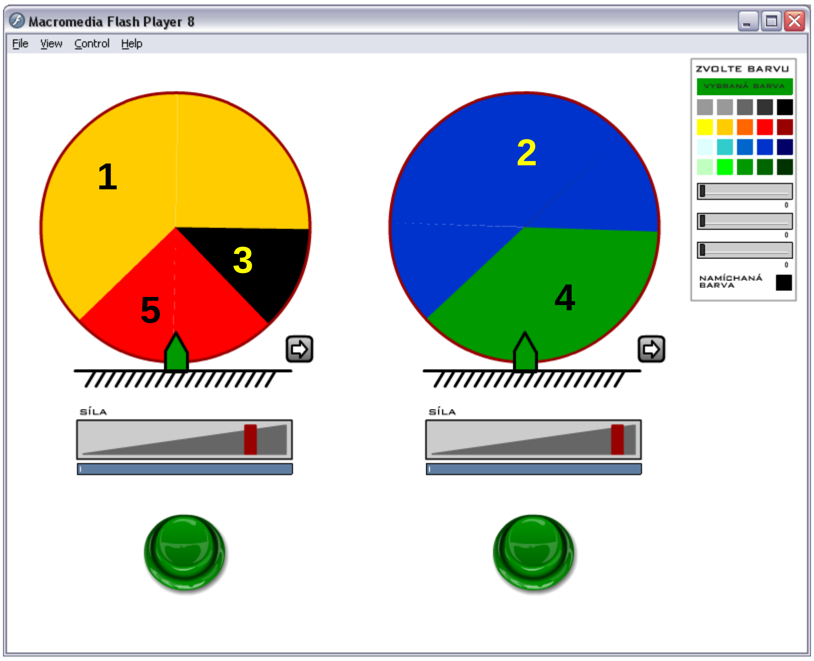
Uživatelé mají k dispozici dvě na sobě nezávislé, libovolně obarvitelné otáčivé ruletky. Ruletky je nejprve možno rozdělit na 2, 3, 4, 6 a 8 stejně velkých dílků. Tyto dílky je poté možno libovolně obarvovat. Po obarvení lze dále nastavit sílu, jakou má být ruletka roztočena. Samotné roztočení ruletek se provádí pomocí zeleného „tlačítka“ pod každou z nich.

Nejjednodušeji formulovaný problém je určit s jakou pravděpodobností padne např. žlutá barva na každé ze znázorněných ruletek.



PARTNEŘI PROJEKTU

Další problém je určen těm žákům či studentům, kteří mají základní znalosti z počtu pravděpodobnosti. Mějme dvě ruletky obarvené následujícím způsobem. Ruletky použijeme ve hře, jejíž pravidla jsou popsána takto.



Dva hráči hrají dvěma ruletkami, každý pouze jednou z nich. Roztočením ruletky vybereme jeden z různě obarvených sektorů. Každá barva je ohodnocena určitou hodnotou (viz obr.). Ten kdo vylosuje barvu, která je ohodnocena vyšší hodnotou, vyhrává. Máme – li možnost vybrat z těchto dvou ruletek, znamená tato možnost volby pro nás výhodu? Kterou ruletku je dobré zvolit a proč? Ověřte svou volbu experimentálně.

Řešení:

Označme:

jev A = {levou ruletkou bude vylosováno větší číslo než pravou ruletkou},

jev B = {pravou ruletkou bude vylosováno větší číslo než levou ruletkou}.

Hráč losující pomocí levé ruletky vyhrává, pokud nastane jev A, hráč losující pomocí pravé ruletky vyhrává, pokud nastane jev B.

Dále označme symbolem x hodnotu (číslo) vylosovanou pomocí levé ruletky a symbolem y hodnotu vylosovanou pravou ruletkou. Výsledkem losování pak bude dvojice (x,y), kterou zapíšeme ve tvaru $(10x + y)$.

Máme tedy zadán pravděpodobnostní prostor (Ω, p),
kde Ω = {12, 14, 32, 34, 52, 54}, A = {32,52,54}, B = {12,14,34} a dále
p(12) = 5/8·5/8 = 25/64,
p(14) = 5/8·3/8 = 15/64,
p(32) = 1/8·5/8 = 5/64,
p(34) = 1/8·3/8 = 3/64,
p(52) = 2/8·5/8 = 10/64,
p(54) = 2/8·3/8 = 6/64.

Z definice pravděpodobnosti jevu plyne:
P(A) = p(32) + p(52) + p(54) = 1/8·5/8 + 2/8·5/8 + 2/8·3/8 = 5/64 + 10/64 + 6/64 = 21/64.
P(B) = p(12) + p(14) + p(34) = 5/8·5/8 + 5/8·3/8 + 1/8·3/8 = 25/64 + 15/64 + 3/64 =
= 25/64 + 15/64 + 3/64 = 43/64.

Protože platí P(A) < P(B), jsou šance hráče hrajícího s pravou ruletkou vyšší než druhého hráče. Pravou ruletku tak můžeme považovat za „lepší“. Pokud tedy má hráč možnost výběru, jedná se pro něj o výhodu.

LITERATURA:

PŁOCKI, A., TLUSTÝ, P. *Pravděpodobnost a statistika pro začátečníky a mírně pokročilé.* Praha : Prometheus, 2007. ISBN 978 – 80 -7196 – 330 - 1.

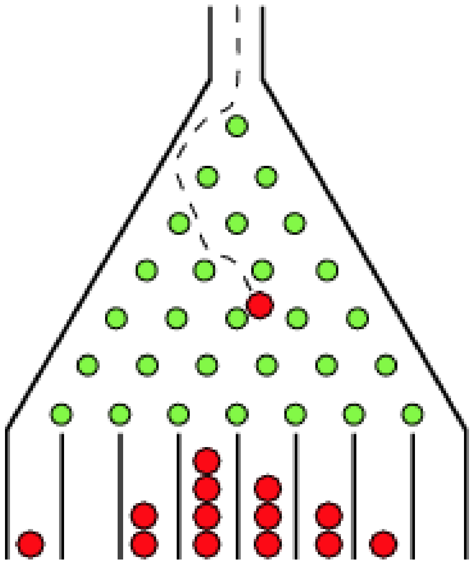
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ
TENTO PROJEKT JE SPOLUFINANCOVÁN EVROPSKÝM SOCIÁLNÍM FONDEM A STÁTNÍM ROZPOČTEM ČESKÉ REPUBLIKY.

PLINKO!

Jedná se o elektronickou podobu televizní soutěže v USA známé pod názvem „The Price is right". Hru je možno volně vyhledat na webu.

Pravidla výběru hráčů a další pravidla této televizní soutěže nejsou podstatná, budeme se dále zabývat herním zařízením, samotným herním procesem a využitím této herní simulace ve vzdělávání nadaných žáků v hodinách matematiky

Základní myšlenka konstrukce tohoto herního zařízení vychází z Galtonovy desky. Galtonova deska je losovací nástroj, který se skládá ze sedmi řad symetricky rozmístěných kolíků a osmi sektorů, do nichž kulička po průchodu deskou padá. Pád kuličky po Galtonově desce představuje náhodný pokus skládající se ze sedmi etap. V obecném případě má Galtonova deska m řad kolíčků a $(m+1)$ sektorů očíslovaných 0, 1,…, m. (Płocki, Tlustý, 2007)

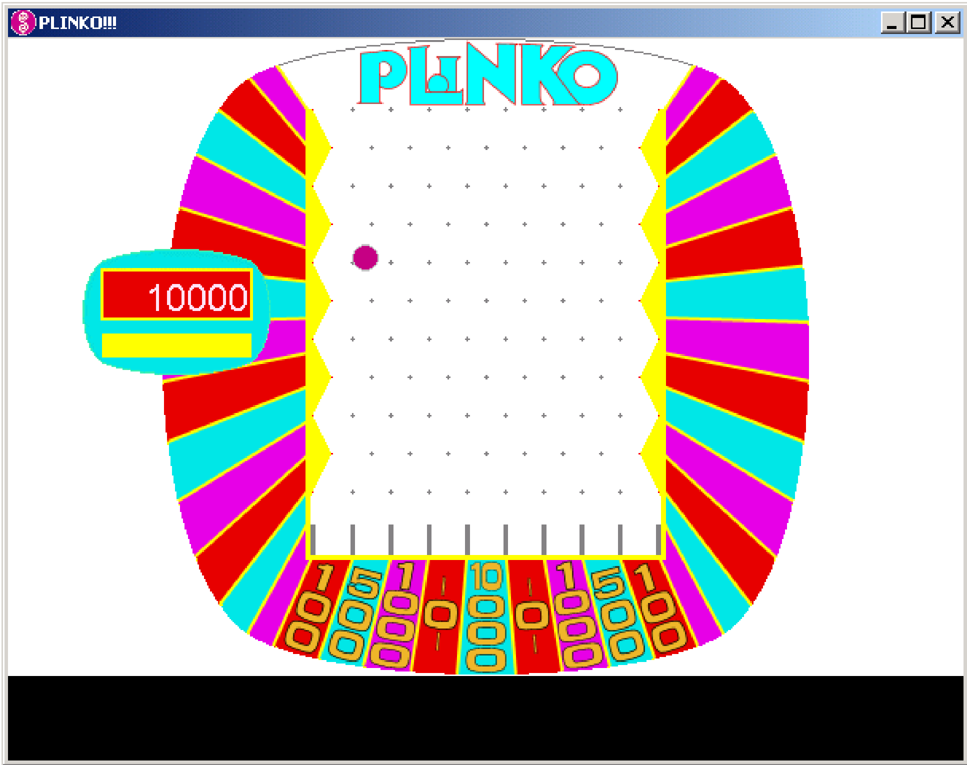


zdroj: http://mathworld.wolfram.com/GaltonBoard.html

PARTNEŘI PROJEKTU

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
www.zsctyrlistek.cz
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ
TENTO PROJEKT JE SPOLUFINANCOVÁN EVROPSKÝM SOCIÁLNÍM FONDEM A STÁTNÍM ROZPOČTEM ČESKÉ REPUBLIKY.

Na Galtonově desce jsou rozmístěny kolíky v trojúhelníkovém tvaru, kdežto na herním zařízení pro hru Plinko! jsou kolíky rozmístěny v obdélníkovém tvaru. Dále se liší počtem úrovní a počtem ohodnocených sektorů v dolní části zařízení.



Kulička je v horní části vhozena na desku (herní zařízení) buď přímo na jeden z kolíků nebo lépe přímo do prostoru vymezeném dvěma sousedními kolíky. Nazvěme tento prostor *vhazovacím sektorem*. Vždy, když kulička spadne na kolík, odrazí se vpravo (nazvěme tento stav "úspěchem") s pravděpodobností p nebo vlevo ("neúspěch") s pravděpodobností $1-p$. Vzhledem k tomu, že kolíky i jejich rozmístění je přesné a symetrické, je pravděpodobnost nastoupení každého z jevů stejná, tedy $p=1/2$. Poté co kulička projde herním zařízením, dopadne do příslušného ohodnoceného sektoru. Ohodnocení daného sektoru pak vyjadřuje velikost výhry.

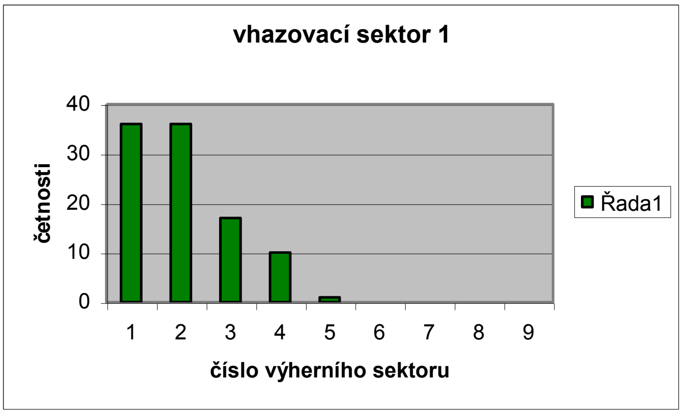
PARTNEŘI PROJEKTU
GYMNÁZIUM ZLÍN LESNÍ ČTVRŤ

Předložíme-li tuto hru (simulaci) žákům, otevírá se zde prostor pro jejich experimentování, objevování, formulování vlastních hypotéz, jejich následná verifikace (ať již pomocí sérií experimentů či vhodného matematického nástroje) a také k rozvoji argumentace. Základním problémem může být nalezení vhodné strategie k maximalizaci výhry v daném počtu pokusů. Žáci intuitivně a aktivně hledají takový vhazovací sektor, který jim zaručuje nejvyšší výhru.

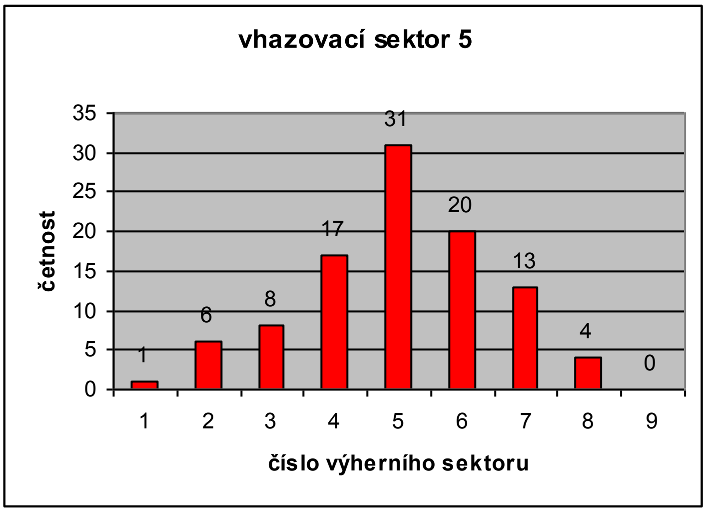
Pomůžeme žákům zformulovat problém takto: *pokusme se objevit, zda existuje určitá strategie pro tuto hru, která maximalizuje výhru.*

Poté co žáci vytvoří a obhájí či neobhájí svoji strategii, je vhodné jim představit jednu z možných cest vytvoření vhodné strategie a její následné ověření pomocí matematických nástrojů. Žáky rozdělíme podle počtu vhazovacích sektorů na 9 resp. 5 skupin (herní zařízení je symetrické, což však žákům nemusí být hned zřejmé a jistě k tomuto zjištění časem dospějí, proto mohou pracovat i v devíti skupinách). Skupiny dostanou za úkol vhazovat kuličku stále do stejného, předem určeného vhazovacího sektoru a zaznamenávat kolikrát kulička doputuje do každého z ohodnocených sektorů (zaznamenávají četnosti náhodného jevu) a výhru v každém pokusu. Výsledky svých pokusů pak přehledně zaznačí do excelovské tabulky, graficky znázorní a spočítají průměrnou výhru v jednom pokusu při vhození kuličky do přiděleného vhazovacího sektoru. Výsledek by vypadal následovně:

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
www.zsctyrlistek.cz
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ
TENTO PROJEKT JE SPOLUFINANCOVÁN EVROPSKÝM SOCIÁLNÍM FONDEM A STÁTNÍM ROZPOČTEM ČESKÉ REPUBLIKY.



hodnota	100	500	1000	0	10000	0	1000	500	100	celkem
četnost	36	36	17	10	1	0	0	0	0	100
Výhra v sektoru	3600	18000	17000	0	10000	0	0	0	0	48600
celková výhra	48600									
průměrná výhra/pokus	486									



hodnota	100	500	1000	0	10000	0	1000	500	100	celkem
četnost	1	6	8	17	31	20	13	4	0	100
výhra v sektoru	100	3000	8000	0	310000	0	13000	2000	0	336100
celková výhra	336100									
průměrná výhra/pokus	3361									

PARTNEŘI PROJEKTU
8 ZŠ MALENOVICE www.skolamalenovice.cz
GYMNÁZIUM ZLÍN LESNÍ ČTVRŤ

Následným porovnáním výstupů jednotlivých skupin žáci docházejí k závěru, že nejvyšší četnosti jsou ve výherních sektorech, které jsou přímo pod zkoumaným vhazovacím sektorem a k němu přilehlých. Vyvstává otázka, zda vhazováním do pátého sektoru budou naše výhry nejvyšší. Porovnáním průměrných výher v jednom pokusu je možno zvolit pátý sektor jako nejvýhodnější.

Toto zjednodušení si můžeme dovolit, za předpokladu, že žáci při svém experimentu prováděli dostatečný počet pokusů. Ze zákona velkých čísel plyne, že pokud roste počet pokusů, pak relativní četnost jevu A v posloupnosti nezávislých pokusů pravděpodobnostně konverguje k pravděpodobnosti p. Při velkém počtu pokusů tedy můžeme odhadovat pravděpodobnost nastoupení jevu jeho relativní četností.

S nadanými žáky, kteří pronikli hlouběji do dané problematiky, je vhodné řešit další, navazující problémy. Mohou se například zabývat otázkou, zda se původní strategie změní v případě, že bychom měli k dispozici toto herní zařízení s jinak ohodnocenými výherními sektory (místo nejvyšší původní výhry v jednom pokusu by bylo možno vyhrát pouze polovinu této částky tj. 5000 bodů). Nebo pokud výherní sektory původně ohodnoceny 0 body ohodnotíme 2000 nebo 5000 body, bude pak výhodné změnit původní strategii? Do kterého vhazovacího sektoru je v tomto případě vhodné kuličku vhodit?

Tyto a další problémy, formulované částečně také díky možnosti experimentování s touto simulací, mají potenciál rozvíjet a kultivovat matematické myšlení a také otevírají žákům dveře k řešení stochastických problémů, mnohými tak neoblíbených.

LITERATURA:

KOPKA, J. *Hrozny problémů ve školské matematice,* Acta Universitatis Purkynianae 40, Studia Matematica I, Ústí nad Labem 1999.

KOPKA, J. Ukázky heuristických strategií. In *Disputationes scientifica Universitatis catholicae in Ružomberok.* Ružomberok: Katolícka univerzita, 2003, roč. 3, č. 3. s. 37-44. ISSN 1335-9185.

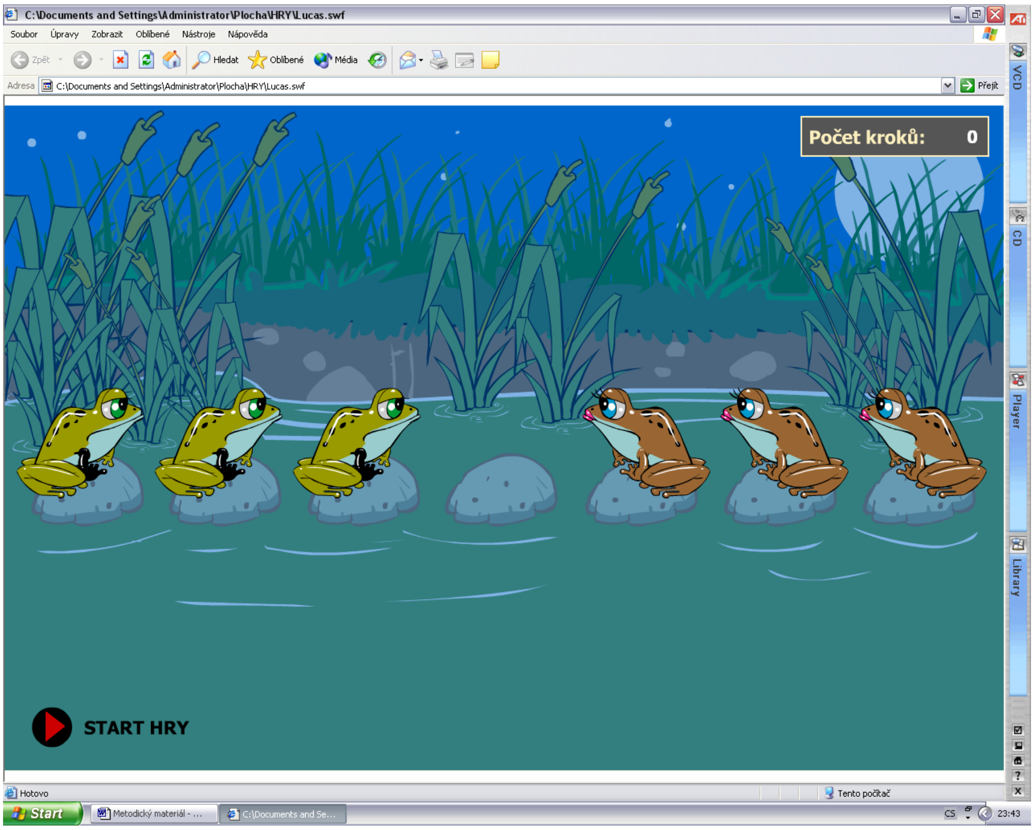
CYHELSKÝ, L., KAHOUNOVÁ, J., HINDLS, R. *Elementární statistická analýza.* Praha: Management press, 1999. 2. vyd. ISBN 80-7261-003-1.

PIJLS, M. Mathematical Investigation with the Computer In *Cultural diversity in mathematics (education): CIAEM 51*. Horwood Publishing Limited, 2000. p. 361-367. ISBN 1-898563-68-3.

PŁOCKI, A., TLUSTÝ, P. *Pravděpodobnost a statistika pro začátečníky a mírně pokročilé.* Praha : Prometheus, 2007. ISBN 978 – 80 -7196 – 330 - 1.

LUCASOVA HRA

Jedná se o hru pro jednoho hráče, kterou je možno na internetu nalézt pod názvem Žáby nebo Jump Across Game (resp. Lucasova hra). Autorem je Eduard Lucas.

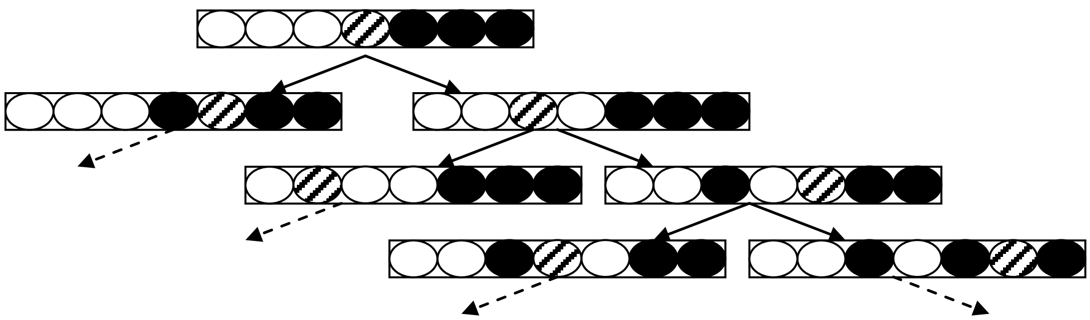


Problém spočívá v přemístění figur z původní konfigurace (viz obr.) do konfigurace výsledné, kdy se figury z levé strany přesunou na stranu pravou a naopak. Přemístění je možné buď na sousední volné pole nebo na nejbližší volné pole (je povoleno přenesení přes jednu figuru). Figurami lze pohybovat pouze jedním směrem. Jakmile se hráč dostane do postavení, z nějž je patrné, že nemá možnost dalšího pohybu nebo že další pohyb k vyřešení nevede, musí být hra restartována a řešena od počátku.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
www.zsctyrlistek.cz
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ
TENTO PROJEKT JE SPOLUFINANCOVÁN EVROPSKÝM SOCIÁLNÍM FONDEM A STÁTNÍM ROZPOČTEM ČESKÉ REPUBLIKY.

V literatuře (Vejmola, 1986) je možné se setkat i s jinak definovanými pravidly – pohyb figury lze provádět oběma směry. Takto zadaná úloha pak může být například obměněna o požadavek, aby se při tažení figury střídaly podle barvy. Použitá verze hry však povoluje pouze tahy zmíněné výše.

Důležitým faktorem pro výběr této hry je možnost vypracování grafického řešení problému. To lze znázornit pomocí orientovaného stromového grafu viz následující obrázek (uvedena pouze ukázka prvních tří tahů), kde v jednotlivých úrovních zanášíme konkrétní postavení figur po provedení tahu. Jednotlivé větve pak představují hrany (orientované) grafu, jejichž ohodnocením číslem 1 a následným určením jejich počtu mezi počáteční a koncovou konfigurací určíme minimální či maximální počet potřebných tahů k vyřešení úlohy. Z grafu lze také určovat počet řešení úlohy. V popisovaném případě je možné nalézt pouze jedno resp. dvě symetrická řešení v závislosti na barvě prvně tažené figury.



Celý graf zachycuje všechna možná postavení figur, jež je možno kódovat a sledovat průběh řešení daného žáka od počátku až do konce.

Po zdárném vyřešení úlohy je dobré diskutovat o počtu řešení a počtu nutných kroků. Žák při experimentování a řešení úlohy prochází různými postaveními figur. Vytváří si hypotézu, že úloha má pouze jedno řešení a tudíž i patřičný počet kroků. Verifikovat tuto hypotézu však již většinou nedokáže.

PARTNEŘI
8 ZŠ MALENOVICE www.skolamalenovice.cz
GYMNÁZIUM ZLÍN LESNÍ ČTVRŤ
PROJEKTU

Jednou z aplikovatelných metod nalezení všech možných cest (i té nejkratší) je využití již výše zmíněného grafického řešení. Pro zjednodušení a následné přehlednější vysvětlení a lepší pochopení metody je vhodné řešit úlohu znovu - graficky, tentokrát však pouze pro dva páry figur.

Žákům je možno předkládat další verze hry, kdy jsou povoleny i tahy zpět a dále je požadováno, aby se figury při tazích střídaly podle barev, nebo přidáváme další figury. Vyvstávají zde následující problémy – *Kolik je možných cest? Je jich tentokrát více? Která z možných cest je nejkratší? Lze určit matematický vztah pro vyjádření nejmenšího počtu tahů pro n figur?*

LITERATURA:

KOPKA, J. *Zkoumání ve školské matematice*. Katolícka univerzita v Ružomberoku : 2006. ISBN 80-8084-064-4.

MAŇÁK, J., ŠVEC, V. *Výukové metody*. Brno : Paido, 2003. ISBN 80-7315-039-5.

VEJMOLA, S. *Konec záhady hlavolamu.* Praha: SPN, 1986. ISBN 80-04-24 287-1.

HANOJSKÁ VĚŽ

Hanojskou věží se nazývá hra, kterou vynalezl francouzský matematik 19. století Edouard Lucas. Publikoval ji pod smyšleným jménem Claus a přikrášlil ji exotickou pověstí, která nepostrádá matematický půvab. Snadno si domyslíme, že „Claus“ je anagramem jména Lucas, vzniklých přehozením písmen l, u, c, a, s.

Podle Lucasovy báje umístil stvořitel světa Brahma pod kupolí největší svatyně ve městě Banares nad svatou řekou Gangou bronzovou desku s připevněnými třemi diamantovými hůlkami. Na jedné hůlce jsou navlečeny 64 kroužky.

Největší je dolní kroužek, nejmenší horní. Průměr kroužků se rovnoměrně zmenšuje od dolního k hornímu. Brahma přikázal kněžím, aby přemístili všechny kroužky na třetí hůlku při zachování těchto pravidel:

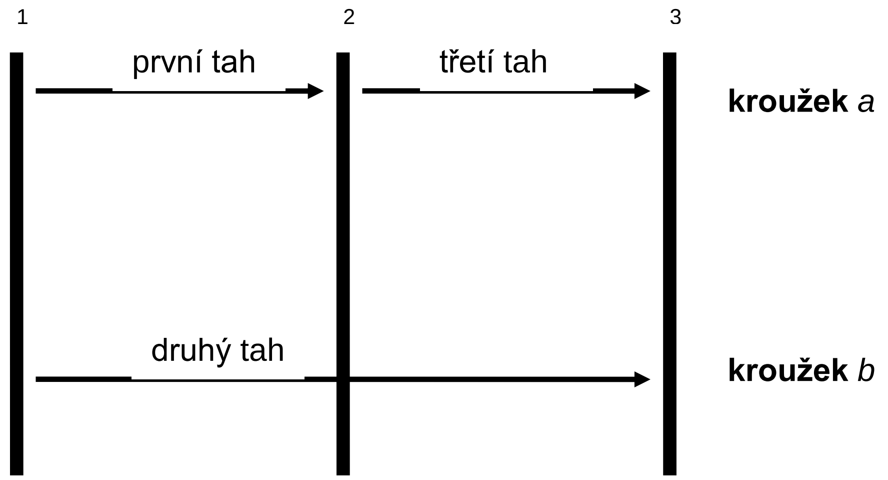
1. je možno přemisťovat vždy jen jeden kroužek,
2. přemístěné kroužky se smějí umísťovat jen tak, že menší kroužky leží na větších,
3. druhou hůlku je možno používat jako pomocnou, ale i na ní musí vždy ležet menší kroužek na větším.

Až kněží přemístí všechny kroužky z první hůlky na třetí, nastane konec světa.

Abychom si ujasnili, kolik času si vyžádá přenesení kroužků z první hůlky na třetí při zachování stanovených pravidel, použijeme metodu usuzování.

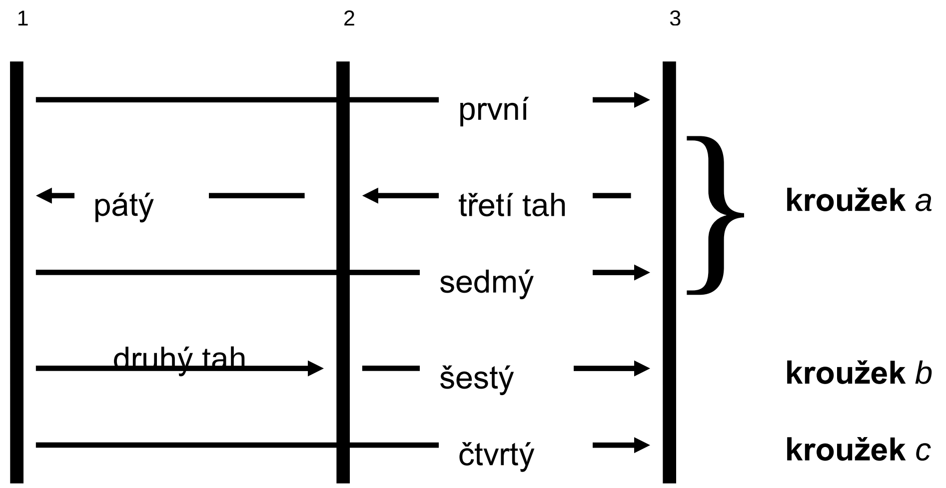
Tato metoda se nazývá indukce a umožňuje dojít k obecnému závěru na základě jednotlivých faktů. Jde zde o tzv. neúplnou indukci, která není matematickou metodou důkazu a může vést k neúplným a chybným závěrům, má však přesto značný heuristický význam.

Nechť na hůlce č. 1 jsou dva kroužky. Jejich přemístění z hůlky č. 1 na hůlku č. 3 je znázorněno na diagramu.



Z diagramu je vidět, že dva kroužky je možno přemístit z hůlky č. 1 na hůlku č. 3 třemi kroky; kroužek *a* se přenáší dvakrát, kroužek *b* se přenáší jednou. Tento postup je možno zapsat ve tvaru: $2^1 + 2^0 = 2 + 1 = 3$.

Nyní mějme na první hůlce kroužky tři. Další diagram ukazuje, kolik kroků je nutno provést, abychom přenesli tyto tři kroužky z hůlky č. 1 na hůlku č. 3.



Z diagramu je patrné, že :

Kroužek *a* se přenáší 4krát, tj. 2^2 přemístění,

Kroužek *b* se přenáší 2krát, tj. 2^1 přemístění,

Kroužek *c* se přenáší 1krát, tj. 2^0 přemístění.

Dohromady $2^2 + 2^1 + 2^0 = 4 + 2 + 1 = 7$ přemístění.

K přemístění čtyř kroužků uvedeným postupem je pak potřeba 15 přemístění:

Kroužek *a* se přenáší 8krát, tj. 2^3 přemístění,

Kroužek *b* se přenáší 4krát, tj. 2^2 přemístění,

Kroužek *c* se přenáší 2krát, tj. 2^1 přemístění,

Kroužek *d* se přenáší 1krát, tj. 2^0 přemístění.

Dohromady $2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 8 + 4 + 2 + 1 = 15$ přemístění.

Obdobným způsobem určíme počet nutných přemístění pěti kroužků.

Kroužek *a* se přenáší 16krát, tj. 2^4 přemístění,

Kroužek *b* se přenáší 8krát, tj. 2^3 přemístění,

Kroužek *c* se přenáší 4krát, tj. 2^2 přemístění,

Kroužek *d* se přenáší 2krát, tj. 2^1 přemístění,

Kroužek *e* se přenáší 1krát, tj. 2^0 přemístění.

Dohromady $2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 31$ přemístění.

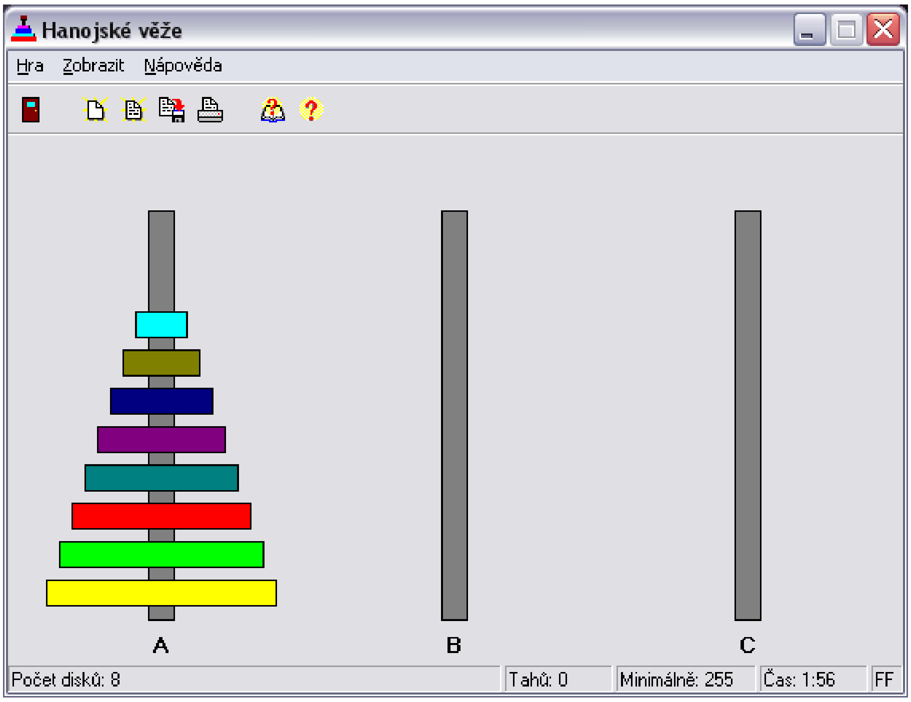
Na základě indukce můžeme usoudit, že k přenesení 64 kroužků z hůlky č. 1 na hůlku č. 3 je třeba vykonat:

$2^{63} + 2^{62} + 2^{61} + \ldots + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$ přemístění.

Kdyby každé přemístění kroužku trvalo pouhou jednu sekundu, bylo by na přemístění 64 kroužků třeba asi 5 miliard století. Můžeme tedy zatím klidně spát.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ
TENTO PROJEKT JE SPOLUFINANCOVÁN EVROPSKÝM SOCIÁLNÍM FONDEM A STÁTNÍM ROZPOČTEM ČESKÉ REPUBLIKY.

Ve hře, kterou Lucas nazval Hanojskou věží, máme přemístit pouze osm kroužků. K jejich přemístění je třeba provést nejméně 255 kroků.



LITERATURA:

KOWAL, S. *Matematika pro volné chvíle. Zábavou k vědě.* Praha : SNTL, 1986. 3. nezměněné vydání.

PARTNEŘI PROJEKTU
GYMNÁZIUM ZLÍN LESNÍ ČTVRŤ